Начальныя упражненія

ПО

высшей математикѣ.

51.
Ш-93 вм.

Сборникъ задачъ по Аналитической Геометріи, Дифференц. и Интегральному Исчисленію, съ конспектомъ теоріи, чертежами и рѣшеніями.

-3221-

ПОСОБІЕ

для учениковъ VII класса реальныхъ училищъ и для начинающихъ.

СОСТАВИЛЪ

Александръ Штрайхманъ.

Инженеръ-технологъ, окончившій физико-математ. факультетъ.

Фундаментальная библіотека
Островскаго реальнаго училища.
Хронологич. кат. № 3308.
Системат. кат. Отд. V № 179

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Складъ изданія у автора: Спб., Подольская, 12.
1910.

Архив Калюжного О.Н. (rarebooks.314159.ru , rarebooks.narod.ru)

Типографія Первой Спб. Трудовой Артели.—Лиговская, 34.

Предисловіе.

Предлагаемый Сборникъ приспособленъ цѣликомъ къ требованіямъ новой программы дополнительнаго класса реальныхъ училищъ. При сравнительной обширности курса, для прочнаго усвоенія его необходимы систематическія упражненія и частое повтореніе пройденнаго. Въ виду этого, я счелъ цѣлесообразнымъ значительную часть задачъ (около трети всего числа) снабдить подробными рѣшеніями, а также включить конспектъ теоріи и разъяснить основныя понятія наглядными примѣрами.

При пользованіи Сборникомъ въ качествѣ пособія для самообученія, рекомендуется начинать съ задачъ, отмѣченныхъ звѣздочкой, и, ознакомившись съ ихъ рѣшеніемъ, приступать къ остальнымъ, причемъ слѣдуетъ имѣть въ виду, что расположеніе задачъ приблизительно соотвѣтствуетъ порядку формулъ, помѣщенныхъ въ началѣ каждой главы.

Въ послѣдней главѣ приведены задачи экзаменаціоннаго типа.

Для краткости введены обозначенія: ур-іе вмѣсто: уравненіе, и △—къ – вмѣсто: треугольникъ.

Спб., 25 февраля 1910 г.

А. Штрайхманъ.

3308
V 179

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

Аналитическая Геометрія.

ВВЕДЕНІЕ.

Если ограничиться прямоугольной Декартовой системой координатъ, то можно сказать, что Аналитическая Геометрія представляетъ собой нѣкоторое обобщеніе и дальнѣйшее развитіе основъ Тригонометріи.

Подобно тому, какъ при всякой точкѣ тригоном. окружности (т. наз. „конецъ дуги") строится линейный синусъ и косинусъ, такъ въ Аналит. Геом. для всякой точки разсматриваемой плоскости, при выбранной системѣ осей, существуетъ ордината, соотвѣтствующая линіи синуса, и абсцисса, соотвѣтствующая линіи косинуса, и примѣняется совершенно аналогичное правило знаковъ. Только разстояніе *какой-нибудь точки* отъ т. наз. „начала координатъ", соотвѣтствующее радіусу, равно, вообще говоря, не единицѣ, а нѣкоторой величинѣ d, такъ что основная формула Тригонометріи принимаетъ въ Аналит. Геом. видъ: $x^2+y^2=d^2$.

Если извѣстны объ координаты точки, то точка является вполнѣ опредѣленной; условимся въ дальнѣйшемъ *данныя* коорд. (или найденныя, но во всякомъ случаѣ извѣстныя) точки обозначать для общности буквами x и y со значками внизу, напр. x_1 и y_1, и заключать ихъ въ *скобки*, поставивъ между ними запятую. Напр., (—3,5) слѣдуетъ читать не какъ десятичную дробь, а такъ: точка съ абсциссой $=-3$, и ординатой $=5$. Точно такъ же, для краткости, говорится: „найти точку", вмѣсто: найти коорд. точки.

Въ Аналит. Геом. разсматриваются, впрочемъ, не отдѣльно взятыя точки, а цѣлыя группы ихъ, т. е. линіи и поверх-

ности, но не всякія, а только т. наз. правильныя, т. е. образованныя по какому нибудь правилу или закону. Если же наудачу провести какую нибудь кривую, то такая линія, вообще говоря, будетъ *неправильной*: это значитъ, что между обѣими координатами любой ея точки *не существуетъ*, въ противность правильнымъ линіямъ, одна и та-же *зависимость*, выражаемая ур-іемъ. Какъ извѣстно, совокупность множества точекъ, обладающихъ однимъ и тѣмъ же свойствомъ, наз. „геометрическимъ мѣстомъ“. Но въ то время, какъ въ элементарной геометріи число разсмотрѣнныхъ такихъ мѣстъ, сравнительно, невелико, въ Аналитической оно значительно больше и самое изученіе ихъ несравненно полнѣе и шире.

Признакомъ принадлежности точекъ *одному и тому же* геом. мѣсту служитъ *одна и та же* зависимость между координатами *одной и той же* точки (x, y). Эта связь выражается ур-іемъ. Найти это ур-іе—значитъ отыскать и соотвѣтствующее геом. мѣсто. Напр., геом. мѣстомъ точекъ, равноудаленныхъ отъ сторонъ даннаго угла, служитъ, какъ извѣстно, его биссектриса; въ элементарной геометріи это доказывается посредствомъ двухъ теоремъ; въ Аналитической-же для угла между осями достаточно поставить условіемъ: абсцисса *по длинѣ* равна ординатѣ, т. е., $x=y$ или $x=-y$ (смотря по тому, въ какой четверти предполагается точка).

Въ виду этого можно сказать, что ур-ія: $x-y=0$ и $x+y=0$ *выражаютъ* биссектрису угла между осями, а ур-іе: $x^2+y^2=a^2$—окружность радіуса a, съ центромъ въ началѣ координатъ.

Слѣдуетъ замѣтить, вообще говоря, что *видъ* ур-ія, т. е., напр., его порядокъ и знаки членовъ, опредѣляютъ собою *видъ* линіи, а числовыя значенія коэффиціентовъ—расположеніе линіи относительно коорд. осей; поэтому, если видъ линіи заранѣе указанъ, напр., прямая, окружность, гипербола и т. д., то найти ея ур-іе значитъ опредѣлить числовыя значенія коэффиціентовъ для соотвѣтствующаго ур-ія общаго вида. Рѣшеніе же задачъ большей частью сводится къ пользованію подходящими къ даннымъ условіямъ формулами и нахожденію искомыхъ коэффиціентовъ.

ГЛАВА I.

КООРДИНАТЫ И УРАВНЕНІЯ. ТОЧКА И ЛИНІЯ ВООБЩЕ.

§ 1. Основныя формулы.

a) Разстояніе между точками: (x_1, y_1) и (x_2, y_2) выражается: $d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ . . . (1).

b) Если даны коорд. концовъ нѣкотораго отрѣзка AB, именно: $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, то коорд. середины этого отрѣзка выражаются: $x=\frac{x_1+x_2}{2}$; $y=\frac{y_1+y_2}{2}$ . . . (2), а коорд. точки C, дѣлящей его такъ, что $\frac{AC}{CB}=\lambda$, выражаются: $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$; $y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$ . . . (3).

c) Если дано неопред. ур-іе: $F(x, y)=0$ . . . (4) *съ постоянн. коэфф.* и если оно имѣетъ безчисленное множество паръ вещественныхъ рѣшеній, то это ур-іе выражаетъ нѣкоторую линію — кривую, или прямую, или совокупность нѣсколькихъ прямыхъ. Каждая пара рѣшеній: $(x=a,\ y=b)$, выражаетъ отдѣльную точку этой линіи, такъ что тождественно $F(a, b)=0$; говорится, что точка (a, b) лежитъ на линіи: $F(x, y)=0$.

d) Если ур-іе (4) задано въ видѣ: $x=a$ . . . (5), но не указано, чему равенъ y, то подразумѣвается, что $y=\frac{0}{0}$ . . . (6) (т. е. чему угодно), и такая совокупность (5) и (6) выражаетъ прямую линію $\parallel OY$ (см. гл. II).

Архив Калюжного О.Н. (rarebooks.314159.ru , rarebooks.nar

e) Одна и та же линія, опредѣленная ур-іемъ (4) при данной системѣ коорд., можетъ еще выражаться и множествомъ другихъ ур-ій того же вида, каждый разъ соотвѣтственно *новому* расположенію осей коорд.; это достигается такъ наз. *преобразованіемъ коорд.* и имѣетъ цѣлью упростить ур-іе (4); при этомъ замѣчательно то свойство, что *порядокъ* линіи, т. е. сумма показателей при x и y въ томъ членѣ ур-ія (4), гдѣ она наибольшая — *не измѣняется* при всевозможныхъ преобразованіяхъ.

f) При параллельномъ перенесеніи осей коорд. въ точку (a, b), формулы перехода:

$$x=a+x';\ y=b+y' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

гдѣ x и y—прежнія, а x' и y'—новыя коорд. одной и той же точки, a и b—прежнія коорд. новаго начала; если же при данномъ преобразованіи начало осталось то же, но прямоуг. оси повернуты на уголъ α (противъ часовой стрѣлки), то при тѣхъ же обозначеніяхъ:

$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha;\ y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

g) Если начало коорд. служитъ полюсомъ, а ось OX — полярной осью, то формулы перехода:

$$x=\rho\cos\varphi;\ y=\rho\sin\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

h) *Слѣдствіе* изъ пункта *d*. Если подразумѣвать $y=\frac{0}{0}$, ур-іе $x=0$ выражаетъ ось OY, а ур-іе: $y=0$ (подразумѣвая $x=\frac{0}{0}$) — *ось* OX.

i) *Слѣдствіе* изъ пункта *c*. Если точка лежитъ на пересѣченіи линіи: $F(x, y)=0$ съ линіей: $\Phi(x, y)=0$, то ея коорд. удовлетворяютъ обоимъ ур-іямъ, а потому представляютъ собой общіе корни системы: $F(x, y)=0$ и $\Phi(x, y)=0$.

k) По даннымъ координатамъ вершинъ $\triangle$-ка: (x_1, y_1), (x_2, y_2) и (x_3, y_3), площадь его выражается:

$$S=\text{числ. знач. } \frac{1}{2}\left[(y_1-y_2)x_3+(y_2-y_3)x_1+(y_3-y_1)x_2\right] \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

§ 2. Задачи, относящіяся къ главѣ I.

1. Даны точки: (1, —3); (—4, 5); (—2, —2); (0, 4); ($\sqrt{2}$, 0); (a^2, b^2); (0, 0); ($-a^2$, $-a^2$); (—1, 4); (—1, —3); (7, —0,1) и (0, —3).

Указать: 1) какія изъ нихъ лежатъ въ 3-ей четверти и 2) какія на оси OX?

2. Данъ квадратъ со стороной a. Принявъ діагонали его за коорд. оси, опредѣлить коорд. его вершинъ.

3. Данъ ромбъ съ угломъ въ 60° и стороной b. Найти коорд. его вершинъ, если осью X служитъ меньшая діагональ, а осью Y—большая.

4. Данъ прав. шестиугольникъ $ABCDEF$ со стороной a. Принимая центръ O за полюсъ, а діагональ AD за полярную ось, найти полярныя коорд. всѣхъ его вершинъ.

5. То же условіе, но полюсъ помѣщается въ вершинѣ D.

6. Въ окружности радіуса r проведены 2 взаимно $\perp$ діаметра XX и YY и вписанъ прав. шестиугольникъ такъ, что горизонтальный діаметръ служитъ діагональю. Опредѣлить Декартовы коорд. вершинъ.

7. То же условіе, но вписанъ прав. 8-угольникъ.

8. Опредѣлить разстояніе между точками: (2, —1) и (—1,3), и найти, какая изъ нихъ ближе къ началу коорд.

9. То же для точекъ: (—4, —3) и (—5, 12).

10. Найти на оси абсциссъ точку, равноотстоящую отъ начала коорд. и отъ точки (—3, 5).

11. Найти такую же точку на оси ординатъ.

12. Найти ординату у нѣкоторой точки, зная, что абсцисса ея равна 3, а разстояніе ея отъ точки (—1, 4) равно 5.

13. Найти абсциссу у точки съ ординатой, равной 6, зная, что ея разстояніе отъ точки (2, —6) равно 13.

Архив Калужного О.Н. (rarebooks.314159.ru – rarebooks.narod.ru

*14. Найти коорд. точки, равноотстоящей отъ 3-хъ точекъ: (2, 7), (3, —1) и (—4, 4).

15. То же для точекъ: (1, 2), (13, 7) и (1, 7).

16. Для какихъ точекъ абсциссы и ординаты равны по абсол. величинѣ, но противоположны по знаку?

*17. Найти на оси ординатъ точку, вдвое болѣе удаленную отъ оси абсциссъ, чѣмъ отъ точки (1, 2).

*18. На оси абсциссъ найти точку, втрое болѣе удаленную отъ начала, чѣмъ отъ точки (5, —6).

*19. Опредѣлить площадь △-ка, зная коорд. вершинъ: (7, 11), (13, 17) и (3, 1).

20. То же для треугольника ABC, если

$$A(1, 2),\ B(-1, 3),\ C(-5,-7).$$

*21. Зная коорд. вершинъ △: (2, 1); (6,—2) и (—3,—11), найти его площадь, периметръ и радіусы круговъ вписаннаго и описаннаго.

*22. То же для △-ка съ вершинами: (0, 5), (3, 1) и (7,—2).

*23. Опредѣлить, лежатъ ли на одной прямой точки: (1,—2), (2, 1) и (3, 4).

*24. Длина отрѣзка AB равна $\sqrt{314}$. Коорд. точки A суть (5, — 3), абсцисса точки B: $x_2 = 22$. Найти ординату точки B и координаты середины отрѣзка AB.

25. Разстояніе между точками $(x_1, 5)$ и $(-1, y_2)$ дѣлится пополамъ въ точкѣ (1,—1); найти x_1 и y_2.

26. Точка A лежитъ на оси абсциссъ, точка B—на оси ординатъ. Найти ихъ коорд., зная, что середина отрѣзка AB находится въ точкѣ (2,5).

*27. Найти на оси абсциссъ такую точку, чтобы середина разстоянія ея отъ точки $A(4,6)$ лежала на оси ординатъ.

*28. Найти точки, дѣлящія разстояніе между точками (5,7) и (2, 1) на 3 равныя части.

*29. Коорд. 3-хъ вершинъ параллелограмма суть: $A(1, 2)$, $B(-5,-3)$ и $C(7,-6)$. Найти коорд. 4-ой вершины.

29а. То же условіе, но вершины въ точкахъ: (1, 4), (2,—3) и (4,—7).

*30. Коорд. вершинъ △-ка суть: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и $C(x_3, y_3)$. Найти коорд. центра тяжести его, т. е. точки пересѣченія медіанъ.

*31. Даны точки $A(3, 4)$ и $B(6, 8)$. Отрѣзокъ AB раздѣленъ въ точкахъ C и D такъ, что $AC : CD : DB = 1 : 3 : 5$. Найти коорд. точекъ C и D.

32. Разстояніе между точками: (3,74;—0,28) и (—4,26;3,8) раздѣлить въ отношеніи 3 : 5.

*33. Выражаетъ ли ур-іе: $x^2+2+y^2=2xy$ геометрич. мѣсто, или нѣтъ?

34. Выражаетъ ли ур-іе: $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{1}{2}$ геом. мѣсто, или нѣтъ?

*35. Выражаетъ-ли ур-іе: $x^2-y^2=16$ геом. мѣсто? Какой видъ оно приметъ, если повернуть оси на 45°?

36. Какой видъ приметъ ур-іе линіи: $x^2-y^2-4x-6y-54=0$, если коорд. оси перенесены параллельно въ точку (2,—3)?

*37. Въ какую точку слѣдуетъ перенести начало коорд., сохраняя систему осей параллельной, чтобъ въ ур-іи линіи: $x^2+y^2-2x-4y-20=0$ исчезли члены, содержащіе x и y въ 1-ыхъ степеняхъ?

38. Какой видъ приметъ ур-іе линіи: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, если перенести начало въ точку $(-a,0)$?

39. Выразить въ полярныхъ коорд. ур-іе линіи: $x^2-y^2=a^2$.

40. То же для линіи $x^2+y^2=mx$.

41. То же для линіи: $(x^2+y^2)^3=4a^2x^2y^2$.

42. Кривая, наз. „*кардіоидой*“, въ полярныхъ коорд. выражается ур-іемъ: $\rho=a(1+cs\varphi)$. Преобразовать его въ прямоуг. коорд., принявъ полюсъ за начало, а полярную ось—за ось OX.

Архив Калюжного О.Н. (rarebooks.314159.ru , rarebooks.narod.ru

42а. То же для кривой: $\rho = m\cos\varphi$.

***43**. Опредѣлить, въ какихъ точкахъ пересѣкается съ осями коорд. линія: $9x^2+16y^2=576$.

44. То же для линіи: $4x^2-9y^2=36$.

***45**. Принадлежитъ ли точка (3,4) линіи: $25x^2-16y^2=400$; если нѣтъ, то, сохраняя ту-же абсциссу, подыскать новую ординату такъ, чтобы точка лежала на этой линіи.

46. Принявъ точки пересѣченія линіи: $x^2+2x-3y=3$ съ осями за вершины $\triangle$-ка, вычислить его площадь и діаметръ круга описаннаго.

ГЛАВА II.

ПРЯМАЯ ЛИНІЯ.

§ 3. Основныя формулы.

a) Всякое алгебраич. ур-іе 1-го порядка съ однимъ или двумя неизвѣстными выражаетъ прямую линію; эта прямая—единственная, если *коэфф. постоянны*. При одной и той же прямоуг. системѣ коорд. ур-іе одной и той же прямой можетъ быть представлено въ одномъ изъ слѣд. 4-хъ видовъ:

1) $Ax+By+C=0$ . . . каноническій видъ
2) $y=ax+b$ . . . . . функціональный видъ
3) $x\cos\alpha+y\cos\beta=\delta$ . . . . нормальный видъ
4) $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$ . . . . . въ отрѣзкахъ на осяхъ

(11).

b) Частные случаи: 5) $y=ax$ . . . ур-іе прямой, проходящей черезъ начало коорд.

6) $y=b$ . . . прямая $\parallel OX$; 7) $x=l$ . . . прямая $\parallel OY$
8) $x=0$ . . . ур-іе оси OY; 9) $y=0$ . . . ур-іе оси OX

(12).

c) Кромѣ случаевъ (7) и (8), ур-іе всякой прямой можно свести къ виду (2): $y=ax+b$; тогда угловой коэфф. $a=tg\alpha$.. (11), гдѣ α – уголъ наклоненія прямой къ OX. Въ случаяхъ (7) и (8) $a=\infty$ и $\alpha=\frac{\pi}{2}$.

d) Разстояніе прямой: $y=ax+b$ отъ начала коорд. δ=числ. знач. $\frac{b}{\sqrt{1+a^2}}$ . . . (13) или для канонич. вида: δ = числ. знач. $\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$ . . . (13'), а разстояніе той же прямой отъ точки (x_0, y_0) выразится: δ=числ. зн. $\frac{ax_0+b-y_0}{\sqrt{1+a^2}}$...(14) или δ=числ. знач. $\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

e) Ур-іе прямой, проходящей черезъ точку (x_0, y_0): $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ или $y-y_0=a(x-x_0)$. . . . . (15). Ур-іе прямой, проходящей черезъ 2 точки: (x_1, y_1) и (x_2, y_2):

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

f) Уголъ между 2-мя прямыми: $y=ax+b$ и $y=a_1x+b_1$ выражается:

$$tg\varphi=\frac{a-a_1}{1+aa_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

Слѣдствія: Условіе ∥ 'сти двухъ прямыхъ: $a=a_1$ . . (18)

Условіе ⊥ 'сти „ „ $a_1=-\frac{1}{a}$ ...(19).

Для ур-ій канонич. вида: $Ax+By+C=0$ и $A_1x+B_1y+C_1=0$ (*) эти условія принимаютъ видъ: $A:A_1=B:B_1$ . . . (18'), и $AA_1+BB_1=0$ . . . (19').

Архив Калюжного О.Н. (rarebooks.314159.ru , rarebooks.narod.

g) Ур-іе „*пучка прямыхъ*“, т. е. любой прямой, проходящей черезъ точку пересѣченія двухъ данныхъ вида (*), имѣетъ видъ: $Ax+By+C+\lambda(A_1x+B_1y+C_1)=0$ . . . (20), гдѣ λ имѣетъ всевозможныя значенія отъ $-\infty$ до $+\infty$, и каждому значенію λ соотвѣтствуетъ опредѣленная прямая.

§ 4. Задачи, относящіяся къ главѣ II.

*__47__. Даны ур-ія прямыхъ: 1) $x=3y$; 2) $x+y=5$; 3) $x+6y=12$; 4) $3x-4y+1=0$; 5) $x=4$; 6) $4x-6y+7=0$. Найти отрѣзки ихъ на осяхъ.

__48__. Найти ур-іе прямой, проходящей черезъ начало коорд. и образующей съ осью OX уголъ: 1) 30^0; 2) 45^0; 3) 60^0; 4) 120^0; 5) 135^0.

__49__. Написать въ каноническомъ и функціон. видѣ ур-ія прямыхъ, отсѣкающихъ на осяхъ отрѣзки: 1) $p=2$; $q=3$; 2) $p=5$; $q=-4$; 3) $p=\infty$; $q=3$.

__50__. Найти углы, образуемые съ осями коорд. прямыми: 1) $x+y+2=0$; 2) $x-y+1=0$; 3) $x\sqrt{3}-y-4=0$.

__51__. Найти ур-іе прямой, наклоненной къ оси абсциссъ подъ угломъ 135^0 и имѣющей начальную ординату $=-4$.

__52__. Найти коорд. точки пересѣченія прямыхъ:
1) $4x-7y+2=0$ съ $4x+5y-22=0$; и 2) $2x+y-3=0$ съ $6x+3y+1=0$; 3) $3x+y-1=0$ и $x-2y-19=0$.

__53__. Найти разстояніе отъ начала коорд. до прямыхъ:
1) $3x-5y+34=0$; 2) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$; 3) $x=3y-10$; 4) $x=2$; 5) $y=-3$.

__54__. Найти разстояніе точки $(4,-1)$ отъ прямыхъ:

$$1)\ y=\frac{5}{12}x-3;\quad 2)\ 2x+3y-1=0;\quad 3)\ x=3.$$

*__55__. На прямой: $y=3x-2$ найти точку, которая отстояла бы отъ начала коорд. на разстояніе $=4\sqrt{2}$.

__56__. Найти разстояніе отъ точки пересѣченія прямыхъ: $3x-y=2$ и $2x+3y=16$ до прямой: $5x+y-1=0$.

__57__. Даны ур-ія 3-хъ сторонъ $\triangle$-ка: 1) AB . . . $x+y-1=0$; 2) BC . . . . . $2x-y+4=0$; 3) AC . . . . . $y=1$. Найти длины его высотъ.

58. Даны ур-ія 2-хъ ‖ линій: $y=9x-1$ и $y=9x+7$. Найти разстояніе между ними.

59. Даны ур-ія сторонъ △-ка: $3x+y+4=0$; $5y-3x-34=0$ и $3x-2y+1=0$. Найти длины сторонъ и высотъ.

60. На оси абсциссъ найти точку, которая отстояла бы отъ прямой: $12x-5y+4=0$ на разстояніе 4 ед.

***61**. На прямой: $x+2y=7$ найти точку, которая отстояла бы отъ прямой: $4x-3y+9=0$ на разстояніе 3-хъ ед.

62. Ур-ія сторонъ △-ка суть: $y=2x-1$; $x+y=2$ и $y=3x$. Найти его площадь, длину сторонъ, медіанъ и радіусовъ впис. и опис. круговъ.

***63**. Найти ур-іе прямой, проходящей черезъ точку (5,4) и образующей съ положит. осями △, площадь котораго равна 40,5 кв. ед.

64. То же черезъ точку (9,2) и площ. $= 48$ кв. ед.

65. Найти ур-іе прямой, проходящей черезъ точку (2,1) и образующей съ осью OX уголъ 45^0.

66. То же черезъ точку $(-2, -2)$ подъ угломъ 150^0 къ оси OX.

67. Черезъ точку (3, 4) провести прямыя ‖ OX и ‖ OY.

68. Провести прямыя черезъ двѣ точки: 1) (0, 1) и (1, 0); 2) (—3, 1) и (0, 5); 3) (1, 2) и начало коорд.; 4) (0, 5) и (—2, 1); 5) (3, 4) и (—2, 4); 6) (1, 2) и (1, —1).

69. Вершины △-ка суть: (7, 13); (11, 17); (3, 5). Найти *ур-ія* его сторонъ.

70. То же, если вершины: (3, 4); (—3, 4); (3, —4).

71. Провести прямую черезъ точку (1, 2) и черезъ середину отрѣзка, соединяющаго точки: (2, 0) и (2, 2).

***72**. Провести прямую черезъ начало коорд. и точку пересѣченія линій: $5x-2y+3=0$ и $13x+y-1=0$.

***73**. Черезъ точку (1, 2) провести прямую, равноотстоящую отъ точекъ: (3, 3) и (5, 2).

Архив Калюжного О.Н. (rarebooks.314159.ru , rarebooks.narod.ru

74. Провести прямую черезъ точку (2, 3) и точку пересѣченія прямыхъ: $2x+3y+1=0$ и $3x-4y=5$.

***75**. Узнать, лежатъ ли 3 точки на одной прямой, и если лежатъ, то каково ея ур-іе; точки: 1) (—4, 7); (0, 8) и (7, 10); 2) (6, 6); (3, 5) и (—6, 2); 3) (2, 3); (—4, —27) и (7, 28).

76. Узнать, проходятъ ли черезъ одну и ту же точку прямыя: $7x+3y=41$; $3x-4y=7$ и $10x-y=48$.

77. То же для прямыхъ: $4x+5y=19$; $2x+9y=-29$ и $11x-10y+8=0$.

***77а**. То же для прямыхъ: $2x+y+3=0$; $2x+3y-1=0$; $x+y-1=0$.

78. Даны 2 пары прямыхъ:

$2x-5y+11=0$ и $4x+y-33=0$ . . . . . 1-ая пара

и $x+10y+21=0$ и $5x-3y-1=0$ . . . . . 2-ая пара.

Провести прямую, соединяющую точку пересѣченія 1 ой пары съ точкой пересѣченія 2-ой пары.

***79**. Черезъ точку (5, 7) провести прямую, параллельную прямой: $2x+3y+6=0$.

80. Черезъ точку (1, 1) провести 2 прямыхъ, параллельныхъ прямымъ: 1) $y=\frac{3}{2}x+\frac{2}{3}$; и 2) $\frac{x}{4}-\frac{y}{5}=1$.

81. Черезъ точку пересѣченія прямыхъ: $2x-y=1$ и $3x+6y=4$ провести прямую $\parallel$ прямой: $x+y=0$.

***82**. Даны вершины $\triangle$-ка: (1, 2), (7, 8) и (5, 6). Показать, что линія, соединяющая середины 2-хъ сторонъ, параллельна 3-ьей сторонѣ.

83. Къ прямой: $4x+5y+11=0$ провести 2 параллельныя на разстояніи 3 ед. отъ нея; найти ихъ ур-ія.

***84**. Черезъ точку (1, 2) провести прямую $\perp$ прямой: $4x+7y=8$.

***85**. На прямой: $5x-7y+1=0$ въ точкѣ съ абсциссой, равной 11, возставить $\perp$ и найти его ур-іе.

*86. Къ прямой: $x+y\sqrt{3}=0$ возставить $\perp$ въ точкѣ, отстоящей на 10 ед. отъ начала коорд.

*87. Изъ начала коорд. опущенъ $\perp$ на прямую:

$$3x-4y+15=0.$$

Найти его основаніе, т. е., въ какой точкѣ онъ пересѣчетъ эту прямую.

*88. Черезъ точку пересѣченія прямыхъ: $y=2x-5$ и $3y-x=4$ провести $\perp$ къ прямой: $5x+2y=3$.

*89. Даны вершины $\triangle$-ка: $M_1(1, -2)$; $M_2(2, 1)$ и $M_3(2, -1)$. Найти ур-ія высотъ и показать, что онѣ пересѣкаются въ одной точкѣ.

*90. Для того же $\triangle$-ка (см. № 89) найти ур-ія медіанъ и показать, что онѣ пересѣкаются въ одной точкѣ.

*91. Даны коорд. вершинъ $\triangle$-ка: (5, —7); (1, 11) и (—4, 13). Найти ур-ія $\perp$'овъ, возставленныхъ изъ серединъ сторонъ, и показать, что они пересѣкаются въ одной точкѣ.

*92. Концы одной стороны квадрата находятся въ точкахъ: (20, 11) и (5, 3). Найти ур-ія всѣхъ его сторонъ.

*93. Концы одной діагонали квадрата суть: (—1, 3) и (3, 1). Найти ур-ія сторонъ и діагоналей.

94. Найти уголъ между прямыми: $y=3x+5$ и $y=7x-2$.

95. То же 1) для прямыхъ: $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$ и $\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=1$;

и 2) для прямыхъ: $3x-4y=44$ и $x+7y=0$.

*96. Найти прямую, проходящую черезъ точку (1, —1) и образующую уголъ 30° съ прямой: $x+y=2$.

97. Вычислить углы $\triangle$-ка по даннымъ вершинамъ:
1) (2, 1); (0, —1) и (—2, 0); 2) (1, —3); (—2, 1) и (—3, —2).

98. Черезъ точку (3, 5) провести прямую подъ угломъ 45° къ прямой: $2x-3y-7=0$.

*99. На оси абсциссъ найти такую точку, изъ которой отрѣзокъ, соединяющій точки (2, 3) и (—1, 5), виденъ былъ бы подъ прямымъ угломъ.

Архив Калюжного О.Н. (rarebooks.314159.ru , rarebooks.narod.ru)

99а. То же для точекъ: (1, 1) и (—2, —4).

***100**. Данъ ромбъ со стороной $=10$ и острымъ угломъ $arctg\ \frac{3}{4}$; доказать *аналитически*, что діагонали его взаимно $\perp$.

ГЛАВА III.

ОКРУЖНОСТЬ.

§ 5. Основныя формулы.

a) Общее ур-іе окружности съ центромъ въ точкѣ (a, b):

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

b) Послѣ упрощенія оно принимаетъ видъ:

$$x^2+y^2+mx+ny=p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

причемъ: $4p+m^2+n^2 \geqslant 0$; не то—*мнимое* мѣсто . . . . . (22′)

c) Для ур-ія (22) коорд. центра суть: $\left(-\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}\right)$, а радіусъ $r=\frac{1}{2}\sqrt{4p+m^2+n^2}$ . . . . . (23).

§ 6. Задачи, относящіяся къ главѣ III.

***101**. Черезъ 3 точки провести окружность:

1) (0, 0), (0, 12) и (5, 0); 2) (0, 0), (0, 7) и (5, 3);

3) (10, 9), (4, —5) и (0, 5); 4) (1, 2), (13, 7) и (1, 7).

102. Составить ур-іе круга, центръ котораго въ точкѣ (—4, —6), а радіусъ равенъ 3.

103. То же, но центръ въ точкѣ (0, 5) и радіусъ $=5$.

104. То-же, но $r=3\sqrt{\frac{2}{3}}$ и центръ (—4,—3).

105. Составить ур-іе круга, съ центромъ въ точкѣ (6,—2), зная, что точка (7,—5) лежитъ на его окружности.

106. Дано ур-іе: $8x^2+8y^2+12x-8y+2=0$; опредѣлить, выражаетъ ли оно окружность, и если выражаетъ, то найти ея центръ и радіусъ.

107. То-же для ур-ія: $x^2+y^2+14x-10y+48=0$.

107а. „ „ „ $3x^2+3y^2-6x-8y+20=0$.

108. „ „ „ $8x^2+8y^2+120x+84y-45=0$.

108а. „ „ „ 1) $5x^2+6y^2-7x+8y-9=0$ и 2) $x^2-y^2-6x+4y=25$.

109. Найти ур-іе окружности, проходящей черезъ точки: (1, 2) и (4, —3), зная, что центръ лежитъ на прямой: $y=3x-19$.

110. Найти ур-іе окружности, проходящей черезъ точку (3, 6) и касающейся обѣихъ осей координатъ.

111. Найти ур-іе окружности, проходящей черезъ точку (19, 25) и касающейся оси OX въ точкѣ (4,0).

112. Дано ур-іе окружности: $x^2-2x+y^2-6y=19$; опредѣлить, лежитъ ли точка (5,5) внутри или внѣ круга.

113. Дана окружность: $x^2+y^2-6x+8y-24=0$; провести окружность, къ ней касательную, принявъ за центръ точку (9,4).

114. Прямая: $5x+3y+19=0$ пересѣкаетъ окружность: $x^2+y^2=113$ въ двухъ точкахъ. Опредѣлить длину хорды и величину стягиваемой ею дуги.

115. Черезъ точку (3,—5) внутри круга: $x^2+y^2=277$ провести хорду такъ, чтобъ она дѣлилась въ этой точкѣ пополамъ.

116. Черезъ точку (4,—3) провести хорду окружности: $x^2+y^2=169$ такъ, чтобъ она дѣлилась въ этой точкѣ пополамъ.

117. Найти площадь круга: $x^2+y^2-6x-8y+24=0$.

118. На окружности: $x^2+y^2=169$ взята во 2-ой четверти точка съ абсциссой=—12. Доказать, что хорды, соединяющія ее съ концами горизонтальнаго діаметра, взаимно $\perp$'ы.

Архив Калужного О.Н. (rarebooks.31415@...

ГЛАВА IV.

ЭЛЛИПСЪ.

§ 7. Основныя формулы.

a) Общее ур-іе эллипса, отнесеннаго къ осямъ, имѣетъ видъ: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ . . . . . (24), гдѣ a и b—полуоси, $a>b$.

b) Линейный эксцентриситетъ $c=\sqrt{a^2-b^2}$ . . . . (25); астроном. эксцентриситетъ $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ . . . . (26); координаты фокусовъ: $(c, 0)$ и $(-c, 0)$ . . . (27).

c) Радіусы векторы любой точки (x, y), лежащей на эллипсѣ, выражаются: $r=a-ex$ и $r_1=a+ex$ . . . , (28), такъ что $r+r_1=2a$.

d) Параметръ *) равенъ: $p=\frac{b^2}{a}$ . . . . . (29). Ур-іе діаметра, сопряженнаго съ хордами: $y=mx+n$, имѣетъ видъ:

$$y=-\frac{b^2}{a^2m} \quad \ldots\ldots \quad (30).$$

e) Ур-іе эллипса, отнесеннаго къ вершинѣ:

$$y^2=2px-\frac{p}{a}x^2 \quad \ldots\ldots \quad (31).$$

f) Полярное ур-іе эллипса, съ полюсомъ въ фокусѣ:

$$\rho=\frac{p}{1+e\cos\varphi} \quad \ldots\ldots \quad (32).$$

g) Площадь эллипса равна πab.

---

*) Параметромъ кривыхъ 2-го порядка наз. длина полухорды, проведенной черезъ фокусъ | большей (или же веществ.) оси.

§ 8. Задачи, относящіяся къ главѣ IV.

119. Дано ур-іе эллипса: $36x^2+100y^2=3600$. Найти его полуоси, оба эксцентриситета, параметръ, и радіусы векторы точки на немъ $(5,3\sqrt{3})$.

120. Дано ур-іе эллипса: $3x^2+7y^2=18$. Найти его полуоси, оба эксцентриситета и параметръ.

121. Найти ур-іе эллипса, отнес. къ осямъ, если сумма радіусовъ векторовъ всякой его точки втрое больше разстоянія между фокусами, а параметръ равенъ 16.

122. Малая ось эллипса равна 12, линейный эксцентриситетъ $= 5$. Найти ур-ія его: отнес. къ осямъ, и отнес. къ вершинѣ.

123. Данъ эллипсъ: $5x^2+9y^2=45$, и точка (10, 21), черезъ которую проведенъ діаметръ Найти ур-іе сопряженнаго съ нимъ діаметра.

124. Найти эксцентриситетъ такого эллипса, у котораго разстояніе между фокусами равно разстоянію между концами большой и малой оси.

125. Данъ эллипсъ: $\frac{x^2}{2}+y^2=1$. Найти длину діаметра, дѣлящаго пополамъ уголъ между осями.

126. Сумма полуосей эллипса равна 27, а линейный его эксцентр.$=9$. Найти простѣйшее ур-іе.

127. Найти простѣйшее ур-іе эллипса, проходящаго черезъ точку $(1,{}^3/_2)$, и имѣющаго фокусъ въ точкѣ (1,0).

128. Найти ур-іе эллипса, зная астрономич. эксцентриситетъ $= \frac{1}{2}$, и линейный $= 1$.

Архив Калюжного О.Н. (rarebooks.314159.ru , rarebooks.narod.ru)

129. Дано ур-іе эллипса, отнесеннаго къ вершинѣ: $y^2=\frac{50}{9}x-\frac{25}{81}x^2$. Найти длины осей.

130. Данъ эллипсъ: $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$. Найти полярное его ур-іе.

131. То-же для эллипса: $5x^2+9y^2=45$.

***132**. Внутри эллипса: $x^2+4y^2=36$ дана точка (4,2). Найти ур-іе хорды, дѣлящейся въ этой точкѣ пополамъ.

***133**. Опредѣлить, какія точки расположены внутри эллипса: $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=1$, какія внѣ, и какія на немъ: 1) (2,3); 2) (—1,1); 3) (6,1); 4) $\left(\sqrt{\frac{10}{3}}, 1\right)$

134. На эллипсѣ: $5x^2+9y^2=45$, найти такую точку, чтобъ одинъ ея радіусъ векторъ былъ вдвое болѣе другого.

135. Дано полярное ур-іе эллипса: $\rho=\frac{3}{2+cs\varphi}$. Написать ур-ія его, отнес. къ осямъ, и отнесен. къ вершинѣ.

136. Найти астрономич. эксцентриситетъ эллипса, зная, что разстояніе между фокусами равно среднему пропорціональному между обѣими осями.

***137**. Въ эллипсѣ: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ концы положительныхъ полуосей соединены хордой. Опредѣлить тѣ точки на эллипсѣ, радіусы векторы которыхъ перпендикулярны къ этой хордѣ.

***138**. Опредѣлить уголъ между радіусами векторами тѣхъ точекъ эллипса, у которыхъ одинъ изъ радіусовъ векторовъ параллеленъ оси ординатъ.

138а. При условіи предыд. задачи найти *длины* радіусовъ векторовъ.

***139**. На эллипсѣ: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ найти тѣ точки, для которыхъ оба радіуса вектора взаимно $\perp$.

140. Въ эллипсъ: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вписанъ квадратъ. Вычислить его площадь.

141. Въ эллипсъ: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вписанъ правильный $\triangle$, такъ что одна изъ его вершинъ совпадаетъ съ концомъ малой оси. Опредѣлить площадь $\triangle$.

142. Изъ эллипса: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вырѣзанъ кругъ, вписанный въ него. Опредѣлить площадь оставшейся части.

143. Превративъ эллипсъ: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ въ равновеликій кругъ съ общимъ центромъ, найти точки ихъ пересѣченія.

144. Въ эллипсѣ: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ черезъ оба фокуса проведены $\parallel$ хорды, подъ угломъ 45° къ оси OX. Соединивъ ихъ концы, опредѣлить площадь полученнаго четыреугольника.

145. Въ эллипсъ: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ вписанъ подобный ему эллипсъ съ тѣмъ же числовымъ (т. е., астрономич.) эксцентриситетомъ, такъ что 2 вершины ихъ совпадаютъ. Найти его ур-іе.

146. Найти ур-ія и длины тѣхъ діаметровъ эллипса: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$, концы которыхъ равно удалены отъ ближайшихъ вершинъ.

147. Эллипсъ, отнесенный къ осямъ, проходитъ черезъ точки: $\left(3,\ \frac{8}{5}\right)$ и $\left(4,-\frac{6}{5}\right)$. Найти его ур-іе.

Архив Калюжного О.Н. (rarebooks.314159.ru , rarebooks.nar

148. Дано полярное ур-іе: $\rho=\frac{9}{5+4cs\varphi}$. Найти простѣйшее ур-іе этого эллипса, отнесеннаго къ осямъ.

*149. Найти астрономич. эксцентриситетъ эллипса, у котораго бо́льшая полуось, малая полуось и линейный эксцентриситетъ составляютъ ариѳметич. прогрессію.

ГЛАВА V.

ГИПЕРБОЛА.

§. 9. Основныя формулы.

a) Простѣйшее ур-іе гиперболы, отнесенной къ осямъ симметріи, имѣетъ видъ: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ . . . . (33), гдѣ a—вещ. полуось, b—мнимая. При $a=b$ гипербола наз. равнобочной. Линейный эксцентрисит. $c=\sqrt{a^2+b^2}$; астроном. $e=\frac{c}{a}$ . . . (34). Параметръ $p=\frac{b^2}{a}$ . . . . . (35).

b) Коорд. фокусовъ суть: $(c, 0)$ и $(-c, 0)$ . . . . . (36). Радіусы векторы точки (x_0, y_0) правой вѣтви гиперболы суть: $r=ex_0-a$; $r_1=ex_0+a$ . . . . . (37), т. е. $r_1-r=2a$.

c) Ур-ія ассимптотъ суть: $y=\frac{b}{a}x$ и $y=-\frac{b}{a}x$ . . . (38).

d) Ур-іе діаметра, сопряженнаго съ хордами: $y=mx+n$, имѣетъ видъ: $y=\frac{b^2}{a^2m}x$ . . . . . (39).

e) Ур-іе гиперболы, отнесенной къ вершинѣ и вещ. оси:

$$y^2=2px+\frac{p}{a}x^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40).$$

f) Полярное ур-іе гиперболы, съ полюсомъ въ фокусѣ:

$$\rho=\frac{p}{1+e\cos\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32).$$

g) Ур-іе гиперболы, отнесенной къ ассимптотамъ:

$$xy=\frac{c^2}{4}\ .$$

§ 10. Задачи, относящіяся къ главѣ V.

150. Длина вещ. оси = 16, мнимой = 14. Написать всѣ 3 вида ур-ія гиперболы.

151. Ур іе гиперболы, отнесенной къ вершинѣ: $y^2 = -\frac{49}{3}x + \frac{49}{36}x^2$. Найти длину осей.

152. Составить простѣйшее ур-іе гиперболы, зная, что разстояніе между вершинами=6, а между фокусами 10 ед.

153. Гипербола, отнесенная къ осямъ, проходитъ черезъ точку (6,5). Составить ея ур-іе, если астрономич. эксцентриситетъ $= \frac{3}{2}$.

154. Составить ур-іе гиперболы, отнесенной къ вершинѣ, зная линейный эксцентрисит.=8, и астрономич.=0,8.

155. На гиперболѣ: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ найти такую точку, чтобъ одинъ изъ ея радіусовъ векторовъ былъ вдвое больше другого.

156. Дана вещ. ось гиперболы = 8, и точка (10, 25) на ней. Найти ея ур-іе, зная, что она отнесена къ осямъ.

157. Гипербола, отнесенная къ осямъ, проходитъ черезъ точки: $(3\sqrt{5}, -4)$ и $(-3\sqrt{10}, 6)$. Найти ея ур-іе.

158. Какой діам. гиперболы: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ сопряженъ съ діаметромъ: $y = 3x$?

159. Черезъ точку (12, 3) провести такую хорду гиперболы: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, которая бы въ этой точкѣ раздѣлилась пополамъ.

Архив Калюжного О.Н. (rarebooks.314159.ru , rarebooks.narod.ru)

160. То же въ точкѣ (3,—1) для гиперболы: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$.

161. Найти уголъ между ассимптотами гиперболы:

$$x^2 - y^2 = 1.$$

162. То же для гиперболы: $4x^2 - 5y^2 = 100$.

163. Дана гипербола: $9x^2 - 25y^2 = 225$ и точка (13 ; 7,2) на ней. Опредѣлить уголъ между радіусами векторами этой точки.

164. Для какой точки гиперболы: $9x^2 - 16y^2 = 144$ радіусы векторы взаимно $\perp$?

165. То же для гиперболы: $x^2 - y^2 = 24$.

166. Для какой точки гиперболы: $x^2 - 16y^2 = 16$ произведеніе радіусовъ векторовъ = 100?

167. Мнимая ось гиперболы равна 4. Написать всѣ 3 ея ур-ія, зная, что вещ. ось втрое меньше разстоянія между фокусами.

*__168__. Данъ эллипсъ: $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{5} = 1$. Найти ур-іе гиперболы, вершины которой находятся въ фокусахъ, а фокусы въ вершинахъ даннаго эллипса.

169. Дана гипербола: $9x^2 - 16y^2 = 144$. Найти ур-іе эллипса, вершины котораго находятся въ фокусахъ ея, а фокусы въ вершинахъ гиперболы.

170. Въ гиперболу: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$ вписанъ квадратъ. Найти коорд. вершинъ его и площадь.

171. То же для гиперболы: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

172. Въ гиперболу: $3x^2 - 5y^2 = 10$ вписанъ прав. $\triangle$, такъ что одна вершина его совпадаетъ съ лѣвой вершиной гиперболы. Найти ур-ія его сторонъ.

173. Найти ур-ія ассимптотъ гиперболы: $3x^2 - 5y^2 = 45$.

174. То же для гиперболы: $x^2 - 9y^2 = 9$.

175. Черезъ точку (4, 6) провести гиперболу такъ, чтобъ фокусы ея совпадали съ фокусами гиперболы: $x^2 - y^2 = 8$.

ГЛАВА VI.

ПАРАБОЛА.

§ 11. Основныя формулы.

a) Ур-іе параболы, отнесенной къ вершинѣ и оси симметріи: $y^2=2px$ . . . . . (41), гдѣ p—параметръ.

b) Координаты фокуса суть: $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, а длина радіуса вектора: $r=x+\frac{p}{2}$ . . . . (42)

c) Ур-іе діаметра, сопряженнаго съ хордами: $y=mx+n$, имѣетъ видъ: $y=\frac{p}{m}$ . . . . . (43).

d) Полярное ур-іе параболы, съ полюсомъ въ фокусѣ:

$$\rho=\frac{p}{1+cs\varphi} \quad \ldots\ldots (44).$$

§ 12. Задачи, относящіяся къ главѣ VI.

176. Составить простѣйшее ур-іе параболы, зная, что она проходитъ черезъ точку (3, 4).

177. Для параболы: $y^2=6x$ найти радіусъ векторъ той точки, у которой ордината равна 12.

178. Найти простѣйшее ур-іе параболы, зная, что фокусъ ея находится въ точкѣ $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$.

179. Полярное ур-іе параболы: $\rho=\frac{3}{1+cs\varphi}$; найти простѣйшее ея ур-іе.

180. Въ параболу: $y^2=11x$ вписанъ правильный $\triangle$, такъ что вершина его совпадаетъ съ ея вершиной. Найти ур-ія его сторонъ.

*181. Чрезъ точку (5, 3) провести внутри параболы: $y^2=7x$ хорду такъ, чтобъ она дѣлилась въ этой точкѣ пополамъ.

182. То же для параболы: $y^2=6x$ и точки (4, 3).

183. На параболѣ: $y^2=24x$ дана точка, отстоящая отъ фокуса на 14 ед. Найти ея разстояніе отъ вершины параболы.

184. Черезъ вершину параболы: $y^2=12x$ проведены 2 прямыя, встрѣчающія ее въ точкахъ, радіусы векторы которыхъ равны 15 ед. Найти уголъ между этими прямыми.

185. Найти діаметръ параболы: $y^2=6x$, сопряженный съ хордой: $y=2x$.

186. Найти діаметръ параболы: $y^2=6x$, проходящій черезъ точку (4, 5).

187. Изъ вершины параболы: $y^2=6x$ описана, какъ изъ центра, окружность, проходящая черезъ фокусъ. Опредѣлить длину общей ихъ хорды и ея ур-іе.

*188. Черезъ фокусъ параболы: $3y^2=10x$ проведены 2 хорды AB и CD подъ угломъ 45° и 135° къ оси OX. Опредѣлить площадь четыреугольника $ABCD$.

*189. Въ параболѣ: $y^2=12x$ проведена черезъ фокусъ хорда $\perp$ оси OX. Въ полученный сегментъ вписанъ квадратъ такъ, что двѣ его вершины лежатъ на хордѣ. Опредѣлить его площадь.

ГЛАВА VII.

КАСАТЕЛЬНЫЯ И НОРМАЛИ КЪ КРИВЫМЪ 2 ГО ПОРЯДКА.

§ 13. Основныя формулы.

I. Если (x_0, y_0) суть коорд. точки касанія и ур-іе кривой дано въ простѣйшемъ видѣ, то ур-іе касательной имѣетъ видъ:

a) для круга: $x_0x+y_0y=r^2$ . . . . . (45).

b) „ эллипса: $\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y=1$ . . . . . (46).

c) „ гиперболы: $\frac{x_0}{a^2}x - \frac{y_0}{b^2}y = 1$ . . . . . (47)

d) „ параболы: $y_0 y = p(x + x_0)$ . . . . . (48).

II. При тѣхъ же условіяхъ ур-ія нормалей будутъ:

e) для круга: $y - y_0 = \frac{y_0}{x_0}(x - x_0)$ . . . . . (49).

f) „ эллипса: $y - y_0 = \frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}(x - x_0)$ . . . . . (50).

g) „ гиперболы: $y - y_0 = -\frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}(x - x_0)$ . . . . . (51).

h) „ параболы: $y - y_0 = -\frac{y_0}{p}(x - x_0)$ . . . (52).

III. Величина подкасательной (проекція на ось OX отрѣзка касат. отъ точки касанія до встрѣчи съ осью OX):

i) для эллипса: $subtangens = \frac{a^2 - x_0^2}{x_0}$ . . . . . (53).

k) „ гиперболы: „ $= \frac{x_0^2 - a^2}{x_0}$ . . . . . (54).

l) „ параболы: „ $= 2x_0$ . . . . . (55).

IV. Величина поднормали (субнормали):

m) для эллипса и гиперболы: $subnorm. = \frac{b^2 x_0}{a^2}$ . . . . (56).

n) „ параболы „ $= p$ . . . . . (57).

§ 14. Задачи, относящіяся къ главѣ VII.

190. Къ кривой: $x^2 + y^2 = 225$ провести касательную въ точкѣ съ абсциссой: $x_0 = 12$; $y_0 > 0$.

191. Къ кривой: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ провести касательную и нормаль въ точкѣ съ ординатой: $y_0 = -1$; $x_0 < 0$.

192. Къ кривой: $y^2 = 24x$ въ точкѣ $y_0 = -4$ провести касательную и нормаль.

193. Провести касательную къ кривой: $\frac{x^2}{40}-\frac{y^2}{30}=1$ въ точкѣ на ней $(8,\ y_0)$.

194. Къ кривой: $x^2+y^2=5$ въ точкахъ пересѣченія съ хордой: $y=x-1$ провести касательныя.

*__195__. Къ кривой: $2x^2+3y^2=12$ провести касат. и нормаль въ точкѣ 1-ой четверти съ ординатой=2.

*__196__. Къ эллипсу, отнесенному къ осямъ, въ точкѣ его $(2,-1)$ проведена касательная: $9y=3x-7$. Найти ур-іе самого эллипса, а также нормали въ этой точкѣ.

*__197__. Къ кривой: $y^2=\frac{8}{3}x$ проведена касательная: $y=\frac{4}{3}x+n$. Найти точку касанія и ур-іе нормали.

198. Для какой точки параболы: $y^2=15x$ касательная наклонена къ оси OX подъ угломъ въ 45°?

199. То же для параболы: $y^2=11x$, если уголъ=120°.

*__200__. Къ параболѣ: $y^2=5x$ въ точкѣ ея $(x_0,\ 10)$ проведена касательная и нормаль. Опредѣлить ихъ длины (отъ точки касанія до оси OX) и величины подкасат. и поднормали.

201. То же для параболы: $y^2=10x$ въ точкѣ $(7;\ y_0>0)$.

*__202__. Къ параболѣ: $y^2=5x$ провести касательную параллельно прямой: $3x-2y+7=0$.

203. Къ кривой: $x^2+y^2=232$ въ точкѣ $(14,\ y_0<0)$ проведены касательная и нормаль. Найти ихъ ур-ія и длины.

*__204__. Къ кривой: $x^2+y^2=144$ въ точкѣ ея $(8,\ y_0)$ проведена касат. Найти длину подкасательной.

*__205__. Найти ур-іе круга, отнесеннаго къ центру, зная, что онъ касается прямой: $y=3x-5$.

206. Къ эллипсу: $8x^2+15y^2=120$ въ точкѣ $(3,\ y_0<0)$ проведена нормаль. Найти ур-іе ея въ отрѣзкахъ на осяхъ.

207. Къ кривой: $4x^2 + 25y^2 = 100$ въ точкѣ ея $(4, y_0 > 0)$ проведены касат. и нормаль. Найти ихъ длины, а также длину подкасат. и поднормали.

***208**. Къ кривой: $3x^2 + 5y^2 = 15$ провести касательную параллельно прямой: $4x - 3y - 1 = 0$.

209. Къ кривой: $9x^2 + 25y^2 = 225$ въ точкѣ ея $(3, y_0 > 0)$ проведена касательная. Опредѣлить углы, образуемые ею съ радіусами-векторами той же точки.

210. Касается ли прямая: $35x - 9y = 148$ кривой: $7x^2 - 3y^2 = 148$? если касается, то найти точку касанія.

211. Къ кривой: $64x^2 - 25y^2 = 1600$ провести нормаль въ точкѣ на ней: $(13, y_0 > 0)$. Найти ур-іе и длину ея.

212. На кривой: $16x^2 - 7y^2 = 112$ дана точка $(4, y_0 > 0)$. Вычислить для этой точки касанія длины касат., нормали, подкасат. и поднормали.

***213**. Для нѣкоторой точки на кривой: $16x^2 - 9y^2 = 144$ одинъ изъ радіусовъ-векторовъ образуетъ съ осью OX уголъ вдвое большій, чѣмъ другой. Вычислить длину нормали и субнормали для этой точки.

214. Для кривой: $25x^2 - 4y^2 = 100$ длина поднормали нѣкоторой точки равна 30. Опредѣлить эту точку.

215. Для какой точки той же гиперболы подкасательная равна поднормали?

***216**. Около окружности: $x^2 + y^2 = 25$ описанъ прав. $\triangle$, такъ что вершина лежитъ на положит. оси OY. Написать ур-ія его сторонъ.

217. Около круга: $x^2 + y^2 = 100$ описанъ 4-угольникъ $ABCD$, причемъ точки касанія суть: $(8, 6)$, $(-8, 6)$, $(0, 10)$ и $(0, -10)$. Найдя длины сторонъ, доказать, что $AB + CD = AC + BD$.

***218**. Около круга: $x^2 + y^2 = 400$ описанъ прав. 6-угольникъ, причемъ 2 вершины его лежатъ на оси OY. Опредѣлить ур-ія всѣхъ его сторонъ.

219. Найти уголъ между касательными къ кривымъ:

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1 \text{ и } y^2=\frac{81}{80}x,$$

проведенными въ точкѣ пересѣченія этихъ кривыхъ.

ГЛАВА VIII.

ЗАДАЧИ НА ВСѢ ОТДѢЛЫ.

***220**. Дана прямоуг. трапеція, высота которой вдвое больше одного основанія и составляетъ половину другого. Найти ур-ія діагоналей и показать, что онѣ взаимно перпендикулярны.

***221**. Найти ур-іе окружности, проходящей черезъ точки пересѣченія кривыхъ:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1 \text{ и } \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1.$$

***222**. Около эллипса: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ описанъ квадратъ, вершины котораго лежатъ на осяхъ. Найти ур-ія его сторонъ и площадь.

***223**. Въ параболу: $y^2=8x$ вписанъ прав. $\triangle$ такъ, что одна его вершина лежитъ въ фокусѣ ея. Найти коорд. остальныхъ вершинъ.

224. Въ эллипсѣ: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$ проведены черезъ фокусы параметрическія хорды (т. е. $\parallel OY$). Черезъ ихъ концы проведены касательныя. Опредѣлить ур-ія сторонъ и площадь полученнаго ромба.

***225**. Центръ круга радіуса r служитъ вершиной параболы, фокусъ которой находится на концѣ горизонтальнаго діаметра. Опредѣлить общую хорду пересѣченія.

*226. Даны точки: $M_1(a, b)$ и $M_2(m, n)$. *Не составляя* ур-ія M_1M_2, найти ур-іе перпендикуляра, возставленнаго изъ середины отрѣзка M_1M_2.

*227. Въ окружность: $x^2+y^2=r^2$ вписанъ прав. 5-угольникъ такъ, что одна изъ его вершинъ лежитъ на оси OX. Черезъ его вершины проведены касательныя. Опредѣлить вершины *описаннаго* 5-угольника.

*228. Доказать, что геом. мѣсто точекъ, разстоянія которыхъ отъ данныхъ: $(a, 0)$ и $(b, 0)$ находятся въ отношеніи $m : 1$, есть окружность, и найти ея центръ.

*229. Найти уголъ, образуемый большею осью эллипса: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{3}=1$ съ тою хордою, которая проходитъ черезъ конецъ этой оси и по длинѣ равна его параметру.

*230. Изъ фокусовъ гиперболы: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ опущены перпендикуляры на объ ассимптоты. Опредѣлить площадь 6-угольника, образованнаго этими перпендикулярами и прямыми, соединяющими ихъ основанія.

РѢШЕНІЯ и ОТВѢТЫ.

1. Въ 3-ьей четв. точки: $(-2,-2)$, $(-a^2,-a^2)$ и $(-1,-3)$. На оси OX: $(0,4)$, $(0,0)$ и $(0,-3)$.

2. Если начать справа противъ часовой стрѣлки, то коорд. вершинъ: $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, $\left(0, \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ и $\left(0, -\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$.

3. Зная, что $sn30^0 = \frac{1}{2}$ и $cs30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, пишемъ въ томъ же порядкѣ (см. № 2): $\left(\frac{b}{2}, 0\right)$, $\left(0, \frac{b\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\frac{b}{2}, 0\right)$ и $\left(0, -\frac{b\sqrt{3}}{2}\right)$.

4. Въ томъ же порядкѣ: $(a, 0^0)$, $(a, 60^0)$, $(a, 120^0)$, $(a, 180^0)$, $(a, 240^0)$ и $(a, 300^0)$.

5. Короткая діагональ равна сторонѣ прав. впис. $\triangle$-ка. Поэтому въ томъ же порядкѣ вершины суть: $(2a, 0^0)$, $(a\sqrt{3}, 30^0)$, $(a, 60^0)$, $(0, 0^0)$, $(a, 300^0)$ и $(a\sqrt{3}, 330^0)$.

6. Въ томъ же порядкѣ: $(r, 0)$, $\left(\frac{r}{2}, \frac{r\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\frac{r}{2}, \frac{r\sqrt{3}}{2}\right)$, $(-r, 0)$, $\left(-\frac{r}{2}, -\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{r}{2}, -\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)$.

7. $(r, 0)$, $\left(\frac{r\sqrt{2}}{2}, \frac{r\sqrt{2}}{2}\right)$, $(0, r)$, $\left(-\frac{r\sqrt{2}}{2}, \frac{r\sqrt{2}}{2}\right)$, $(-r, 0)$, $\left(-\frac{r\sqrt{2}}{2}, -\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)$, $(0, -r)$, $\left(\frac{r\sqrt{2}}{2}, -\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)$. (См. рѣшеніе №2).

8. $d=5$. Первая точка ближе, такъ какъ $\sqrt{5}<\sqrt{10}$.

9. $d=\sqrt{226}$. Первая ближе, ибо $5<13$.

10. Точка, лежащая на оси OX, имѣетъ коорд. $(x, 0)$; слѣд., $\sqrt{(x+3)^2+(0-5)^2}=x$, откуда $x=-\frac{17}{3}$.

11. Искомая точка: $(0, y)$. Изъ ур-ія находимъ: $y=\frac{17}{5}$.

12. Искомыхъ точекъ двѣ: (3, 7) и (3, 1).

13. Точекъ двѣ: (7, 6) и (—3, 6).

14. Составивъ 2 ур-ія: $\sqrt{(x-2)^2+(y-7)^2}=$
$=\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2}$ и $\sqrt{(x-2)^2+(y-7)^2}=\sqrt{(x+4)^2+(y-4)^2}$, находимъ: $x=\frac{13}{34}$; $y=\frac{93}{34}$.

15. Аналогично находимъ: $x=7$; $y=\frac{9}{2}$.

16. Для точекъ 2-ой и 4-ой четверти, лежащихъ на биссектрисѣ прямого угла между осями.

17. $y=2\sqrt{(0-1)^2+(y-2)^2}$; $y_1=\frac{10}{3}$; $y_2=2$, т. е., точки:

$$\left(0, \frac{10}{3}\right) \text{ и } (0, 2).$$

18. $x=3\sqrt{(x-5)^2+(0+6)^2}$; корни мнимые, слѣд. такихъ *точекъ нѣтъ*.

19. По формулѣ (10), $S=$ числ. значен. $\frac{1}{2}[(11-17)\cdot 3+$
$+(17-1)\cdot 7+(1-11)\cdot 13]=18$ кв. ед. (знакъ—отбрас.).

20. По формулѣ (10), $S=12$ кв. ед.

21. $S=$ числ. знач. $\left(-\frac{63}{2}\right)=\frac{63}{2}$ кв. ед.; $2p=d_1+d_2+d_3=$
$=5+13+9\sqrt{2}=9(2+\sqrt{2})$, причемъ: $a=5$, $b=13$, $c=9\sqrt{2}$.

Тогда, по формуламъ элем. геометріи: рад. впис. $r=\frac{S}{p}=$ $=\frac{63}{9(2+\sqrt{2})}=\frac{7}{2}(2-\sqrt{2})$. Рад. опис. $R=\frac{abc}{4S}=$ $=\frac{5\cdot 13\cdot 9\sqrt{2}}{2\cdot 63}=\frac{65}{14}\sqrt{2}$. Можно сперва, подобно № 14, найти центръ круга опис., а потомъ взявъ его разстояніе отъ одной изъ вершинъ, опредѣлить R.

22. $S=\frac{7}{2}$; $2p=5+5+7\sqrt{2}$; $r=\frac{7\cdot 2}{2(10+7\sqrt{2})}=$ $=\frac{7}{2}(10-7\sqrt{2})$; $R=\frac{5\cdot 5\cdot 7\sqrt{2}}{14}=\frac{25}{2}\sqrt{2}$. *Повѣрка:* центръ круга опис. въ точкѣ $\left(\frac{31}{2},\ \frac{27}{2}\right)$; $R=\sqrt{\left(\frac{31}{2}-0\right)^2+\left(\frac{27}{2}-5\right)^2}=$ $=\sqrt{\frac{1250}{4}}=\frac{25}{2}\sqrt{2}$.

23. Если всѣ вершины $\triangle$-ка лежатъ на одной прямой, то площадь его=0, и наоборотъ; здѣсь $S=\frac{1}{2}[-9-3+12]=0$. Слѣдов., *лежатъ на одной прямой.*

24. Пусть ордината B будетъ y_2; тогда: $\sqrt{(5-22)^2+(-3-y_2)^2}=\sqrt{314}$, откуда $y_2=-3\pm 5$, т. е., точекъ B двѣ: (22, 2) и (22,—8). Тогда коорд. середины отрѣзка AB по формуламъ (2) найдемъ: либо $x=\frac{5+22}{2}=\frac{27}{2}$; $y=-\frac{3+2}{2}=-\frac{1}{2}$, т. е., точка $\left(\frac{27}{2},-\frac{1}{2}\right)$; либо: $x=\frac{5+22}{2}=$ $=\frac{27}{2}$; $y=-\frac{3-8}{2}=-\frac{11}{2}$, т. е. точка $\left(\frac{27}{2},-\frac{11}{2}\right)$.

25. По формуламъ (2): $1=\frac{x_1-1}{2}$; $-1=\frac{5+y_2}{2}$; $x_1=3$; $y_2=-7$.

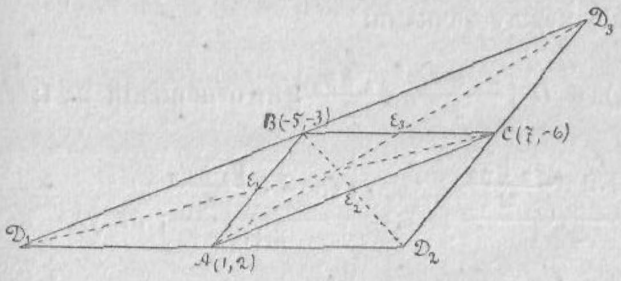
26. Аналогично: $x_1=4$; $y_2=10$, т. е. $A(4, 0)$ и $B(0, 10)$.

27. Пусть искомая точка $(x_1, 0)$; середина $(0, y)$; тогда находимъ: $x_1 = -4$; $y = 3$. Искомая точка $(-4, 0)$.

28. Такъ какъ 1-ая точка дѣлитъ отрѣзокъ въ отношеніи 1:2, то $\lambda = \frac{1}{2}$ и формулы (3) даютъ: $x = \frac{5 + \frac{1}{2} \cdot 2}{1 + \frac{1}{2}} = 4$;

$y = \frac{7 + \frac{1}{2} \cdot 1}{1 + \frac{1}{2}} = 5$, т. е., первая точка дѣленія $(4, 5)$. Для 2-ой точки $\lambda = 2:1$ и аналогично находимъ $(3, 3)$.

29. Такъ какъ $\triangle ABC$ составляетъ половину искомаго параллелограмма, то двѣ изъ его сторонъ служатъ сторонами этого параллелогр., а 3-ья—діагональю. Смотря по тому, какую изъ сторонъ $\triangle$-ка мы назначимъ діагональю, задача допускаетъ 3 рѣшенія:



1) Пусть AB—діагональ; тогда находимъ коорд. ея середины E_1 ... $x_1 = \frac{1-5}{2} = -2$; $y_1 = \frac{2-3}{2} = -\frac{1}{2}$; но та же точка служитъ срединой діагонали CD_1; обозначая координаты искомой вершины D_1 черезъ X_1 и Y_1, имѣемъ: $-2 = \frac{7+X_1}{2}$; $-\frac{1}{2} = \frac{-6+Y_1}{2}$; откуда $X_1 = -11$; $Y_1 = 5$.

2) Пусть AC—діагон.; ея средина E_2; искомая вершина D_2 $(X_2,\ Y_2)$; какъ общая средина AC и BD_2, точка E_2 даетъ: $\frac{1+7}{2}=\frac{-5+X_2}{2}$; $\frac{2-6}{2}=\frac{-3+Y_2}{2}$; откуда $X_2=13;\ Y_2=-1$.

3) Пусть BC—діагональ; точка E_3, какъ общая середина для BC и AD_3, даетъ: $\frac{-5+7}{2}=\frac{1+X_3}{2}$; $\frac{-3-6}{2}=\frac{2+Y_3}{2}$; откуда $X_3=1;\ Y_3=-11$.

29а. Подобно предыд., 3 рѣш.: $D_1(3,\ 0)$; $D_2(-1,\ 8)$ и $D_3(5,-14)$.

30. Какъ извѣстно, центръ тяжести $\triangle$ лежитъ на каждой изъ его медіанъ въ точкѣ, которая дѣлитъ ее въ отношеніи 2 : 1, считая отъ вершины. Выбравъ, напр., медіану AD, находимъ сперва коорд. точки D, какъ средины отрѣзка BC: $x=\frac{x_2+x_3}{2}$; $y=\frac{y_2+y_3}{2}$. Далѣе, обозначая искомыя коорд. точки M чрезъ $(X,\ Y)$, пишемъ, какъ для точки, дѣлящей разстояніе между точками:

$A\ (x_1,\ y_1)$ и $D\left(\frac{x_2+x_3}{2},\ \frac{y_2+y_3}{2}\right)$ въ отношеніи 2 : 1; т. е. $\lambda=2$,

$X=\frac{x_1+2\cdot\frac{x_2+x_3}{2}}{2+1}$; $Y=\frac{y_1+2\cdot\frac{y_2+y_3}{2}}{2+1}$; откуда находимъ:

$X=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$; $Y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$.

31. Точка C дѣлитъ AB въ отношеніи 1 : 8, т. е. $\lambda=\frac{1}{8}$, поэтому находимъ $C\left(\frac{10}{3},\ \frac{40}{9}\right)$. Точка D даетъ $\lambda=\frac{4}{5}$, поэтому опредѣляемъ $D\left(\frac{13}{3},\ \frac{52}{9}\right)$.

32. Искомая точка: (0,74; 1,25).

33. Придавъ видъ: $(x-y)^2=-2$, заключаемъ, что для x и y вещ. значеній не существуетъ, а слѣдов., соотвѣт. геом. мѣста *нѣтъ*.

34. Упрощеніемъ приводимъ къ виду: $x=9y$, слѣд., *выражаетъ* геом. мѣсто (прямую линію).

35. Выражаетъ; пользуясь формулами (8), находимъ:

$$sn^2 45^0(x'-y')^2-sn^2 45^0(x'+y')^2=16, \text{ т. е. } x'y'=-8.$$

36. Пользуясь формулами (7), находимъ: $x'^2-y'^2=49$.

37. Оставляемъ пока a и b неизвѣстными и пользуемся формулами (7); данное ур-іе принимаетъ видъ:

$$x'^2+y'^2+(2a-2)x'+(2b-4)y'+a^2+b^2-2a-4b-20=0 \ldots (1)$$

Чтобъ здѣсь исчезли члены, содержащіе 1-ыя степ. x' и y', надо ихъ коэфф—ы приравнять нулю; тогда: $a=1$; $b=2$ и ур-іе (1) приметъ видъ: $x'^2+y'^2=25$.

38. Здѣсь $x=x'-a$; $y=y'$; получится: $y'^2=2\frac{b^2}{a}x'-\frac{b^2}{a^2}x'^2$.

39. По формуламъ (9) будетъ: $\rho^2 cs2\varphi=a^2$.

40. Аналогично: $\rho=mcs\varphi$.

41. Аналогично: $\rho=\pm asn2\varphi$.

42. $(x^2+y^2-ax)^2=a^2(x^2+y^2)$, по формуламъ (9).

42а. Изъ формулъ (9): $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$; $cs\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; будетъ: $x^2+y^2=mx$.

43. Ур-іе оси OX: $y=0$. Рѣшая его совмѣстно съ ур-іемъ данной кривой, находимъ: $x_1=8$; $x_2=-8$; т. е. въ точкахъ: (8, 0) и (—8, 0). Съ осью OY въ точкахъ: (0, 6) и (0,—6).

44. Подобно № 43, находимъ: (3, 0), (—3, 0); съ осью OY не пересѣкается.

45. Такъ какъ $x=3$, $y=4$, не служитъ рѣшеніемъ даннаго ур-ія, то точка (3, 4) *не лежитъ* на заданной линіи; если же въ ур-іе: $25x^2-16y^2=400$ подставить $x=3$, то для y получатся мнимыя значенія, изъ чего слѣдуетъ, что задача *невозможна*.

46. Точки: (1, 0), (—3, 0) и (0,—1). Площадь=2; $R=\sqrt{5}$.

47. 1-ая прямая проходитъ черезъ начало, поэтому отрѣзки на осяхъ равны нулю. Въ другихъ случаяхъ надо перенести свободный членъ на правую часть и раздѣлить обѣ части на него же. Для 2-ой прямой отрѣзки равны 5 и 5, для 3-ьей. . . . 12 и 2, для 4-ой:$-\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$, для 5-ой 4 и ∞, для 6-ой: $-\frac{7}{4}$ и $\frac{7}{6}$.

48. 1) $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$; 1) $y=x$; 3) $y=\sqrt{3}x$; 4) $y=-\sqrt{3}x$; 5) $y=-x$.

49. 1) $3x+2y-6=0$; $y=-\frac{3}{2}x+3$;

2) $4x-5y-20=0$; $y=\frac{4}{5}x-4$; 3) $y-3=0$; $y=3$.

50. По формулѣ (11) для 1-й: $\alpha=135^0$; $\beta=135^0-90^0=45^0$, гдѣ β—уголъ съ осью OY. Для 2-й: $\alpha=45^0$; $\beta=-45^0$; для 3-й: $\alpha=60^0$; $\beta=-30^0$.

51. $y=-x-4$, такъ какъ $tg135^0=-1$.

52. Рѣшая совмѣстно оба ур-ія, находимъ для 1-й пары точку (3, 2); для 2-й пары: (∞, ∞), т. е. прямыя параллельны; для 3-й (3, —8).

63. По формуламъ (13′) и (13), находимъ для 1-й прямой

$\delta=\frac{34}{\sqrt{3^2+5^2}}=\sqrt{34}$; для 2-й: $\delta=\frac{6}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{6}{13}\sqrt{13}$;

для 3-й: $\delta=\frac{10}{\sqrt{3^2+1}}=\sqrt{10}$; для 4-й: $\delta=2$; для 5-й: $\delta=3$.

54. 1) $\delta =$ числ. знач. $\dfrac{5\,.\,4-12\,.\,(-1)-36}{\sqrt{5^2+12^2}} = \dfrac{4}{13}$;

2) $\delta = \dfrac{2\,.\,4+3(-1)-1}{\sqrt{2^2+3^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{13}}$;

3) $\delta = \dfrac{4-3}{\sqrt{1^2+0}} = 1$.

55. Для искомой точки существуетъ ур-іе:

$$\sqrt{x^2+y^2} = 4\sqrt{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Кромѣ того, какъ для лежащей на заданной прямой, для ея коорд. обязательно ур-іе:

$$y = 3x - 2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Рѣшая ихъ совмѣстно, находимъ 2 точки:

$$\left(2,\ 4\right) \text{ и } \left(-\frac{4}{5},\ -\frac{22}{5}\right).$$

56. $\delta = \dfrac{5\,.\,2+4-1}{\sqrt{25+1}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{26}$.

57. $h_a = \sqrt{5}$; $h_b = 1$; $h_c = 0{,}75\sqrt{2}$.

58. Беремъ произвольную точку на первой изъ нихъ, напр. ($x=0$, $y=-1$). Тогда $\delta = \dfrac{4}{41}\sqrt{82}$.

59. $a = 2\sqrt{10}$; $b = 2\sqrt{34}$; $c = 4\sqrt{13}$; $h_a = \dfrac{18}{5}\sqrt{10}$;

$h_b = \dfrac{18}{17}\sqrt{34}$; $h_c = \dfrac{18}{13}\sqrt{13}$.

59а. $S = 1{,}5$ кв. ед.

60. Точки: $\left(4,\ 0\right)$ и $\left(-\dfrac{14}{3},\ 0\right)$.

61. Коорд. искомой точки удовлетворяютъ ур-ію первой прямой и условію: $\dfrac{4x-3y+9}{\pm\sqrt{4^2+3^2}} = 3$; рѣшая совмѣстно, находимъ 2 точки: $\left(3,\ 2\right)$ и $\left(\dfrac{69}{11},\ \dfrac{4}{11}\right)$.

62. $S=1{,}5$; $a=0{,}5\sqrt{2}$; $b=1{,}5\sqrt{10}$; $c=2\sqrt{5}$.

$$m_a=\frac{13}{4}\sqrt{2};\ m_b=\frac{1}{4}\sqrt{74};\ m_c=0{,}5\sqrt{26};\ R=2{,}5;$$

$$r=\frac{6}{4\sqrt{5}+3\sqrt{10}+\sqrt{2}}.$$

63. Пусть LN — искомая прямая; p и q—ея отрѣзки на осяхъ, такъ что ур-іе прямой имѣетъ видъ: $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$. Задача сводится къ нахожденію p и q. Для этого составляемъ 2 ур-ія: во-первыхъ, площадь $\triangle LON$: $\frac{p\cdot q}{2}=40{,}5$;(1) . . . . во-вторыхъ, точка (5,4) принадлежитъ искомой прямой: а потому: $\frac{5}{p}+\frac{4}{q}=1$ . . . (2). Рѣшая совмѣстно оба уравненія, находимъ: 1) $p=9$; $q=9$; 2) $p=\frac{45}{4}$; $q=\frac{36}{5}$.

Подставивъ эти системы рѣшеній въ ур-іе прямой, получаемъ 2 прямыя: 1) $x+y=9$; 2) $25x+16y=180$.

64. $2x+27y=27$ и $2x+3y=24$.

65. По формулѣ (15) находимъ: $x-y=1$.

66. $x+y\sqrt{3}+2(\sqrt{3}+1)=0$.

67. По формуламъ (12): 1) $y=4$; 2) $x=3$.

68. По формулѣ (16): 1) $x+y=1$; 2) $4x-3y+15=0$; 3) $y=2x$; 4)$2x-y+5=0$; 5) $y=4$; 6) $x=1$.

Въ послѣднемъ случаѣ формула (16) имѣетъ видъ:

$$(y-y_1)(x_2-x_1)=(x-x_1)(y_2-y_1).$$

69. $2x-y-1=0$; $x-y+6=0$; $3x-2y+1=0$.

70. $y=4$; $x=3$; $4x+3y=0$.

71. $x+y-3=0$.

72. Пользуясь формулой (20), имѣемъ искомое ур-іе въ видѣ: $5x-2y+3+\lambda(13x+y-1)=0$ . . . (1). Такъ какъ ($x=0$, $y=0$) служитъ системой корней этого ур-ія, то получается:

$3-\lambda=0$; $\lambda=3$. Тогда ур-іе (1) принимаетъ видъ: $44x+y=0$.

73. Ур-іе прямой, проходящей черезъ точку (1, 2), беремъ въ видѣ:

$A(x-1)+B(y-2)=0$, т. е. $Ax+By-A-2B=0$ . . . (1).

Разстояніе точки (3, 3) отъ этой прямой выражается:

$$\delta=\frac{A\,.\,3+B\,.\,3-A-2B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Разстояніе же точки (5, 2):

$$\delta_1=\frac{A\,.\,5+B\,.\,2-A-2B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

По условію, разстоянія эти равны.

1) Взявъ знаменателей съ одинаковыми знаками и приравнявъ $\delta=\delta_1$, имѣемъ ур-іе:

$3A+3B-A-2B=5A+2B-A-2B$; откуда: $B=2A$.

Вставляя это значеніе B въ ур-іе (1), получаемъ:

$Ax+2Ay-A-4A=0$, или, сокращая на A не $=0$ (такъ какъ при $A=0$ было бы и $B=0$ и ур-іе (1) потеряло бы смыслъ), найдемъ:

$$x+2y-5=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I).$$

2) Взявъ же знаменателей съ противоположными знаками, получаемъ: $3A+3B-A-2B=-(5A+2B-A-2B)$; откуда $B=-6A$. При $B=-6A$, ур-іе (1) принимаетъ видъ:

$Ax-6Ay-A+12A=0$, или, по сокращеніи:

$$x-6y+11=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (II).$$

74. Подобно № 72, находимъ: $\lambda=\frac{14}{15}$, и искомая прямая:

75. Проведемъ прямую черезъ 2 изъ 3-хъ заданныхъ точекъ; если коорд. 3-й точки тоже удовлетворяютъ ур-ію этой прямой, то задача рѣшена:

1) Въ первомъ случаѣ, прямая, проходящая черезъ точки: (—4, 7) и (0, 8), имѣетъ ур-іе: $x-4y+32=0$. Коорд. точки (7, 10) не служатъ его корнями, слѣд., эти 3 точки *не лежатъ* на одной прямой.

2) Лежатъ всѣ на прямой: $x-3y+12=0$.

3) „ „ „ „ $5x-y=7$.

76. Найдя пересѣченіе первыхъ двухъ, смотримъ, лежитъ-ли полученная точка и на 3-й прямой: точка (5, 1) *общая* всѣмъ 3 прямымъ.

77. Нѣтъ общей точки.

77а. Болѣе изящный пріемъ рѣшенія основанъ на формулѣ (20):

Общій видъ ур-ій прямыхъ, проходящихъ чрезъ точку пересѣченія первыхъ двухъ прямыхъ:

$$2x+y+3+\lambda(2x+3y-1)=0, \text{ т. е. } (2+2\lambda)x+(1+3\lambda)y+$$
$$+3-\lambda=0 \ldots (1).$$

Для того, чтобы 3-ья прямая: $x+y-1=0$ принадлежала пучку прямыхъ, выражаемыхъ ур-іемъ (1), очевидно, надо: $\frac{2+2\lambda}{1}=\frac{1+3\lambda}{1}=\frac{3-\lambda}{-1}$. Разсматривая написанную пропорцію, какъ 2 ур-ія относительно λ, находимъ, что они противорѣчатъ другъ другу (при $\lambda=1$, получается: $4=4=-2$), изъ чего слѣдуетъ, что 3-ья прямая *не проходитъ* черезъ точку пересѣченія двухъ первыхъ.

78. Точки (7, 5) и (—1, —2). Прямая: $7x-8y-9=0$.

79. Угловой коэфф. данной прямой $=-\frac{2}{3}$, поэтому на основаніи формулъ (15) и (18), искомое ур-іе будетъ:

$$y-7=-\frac{2}{3}(x-5), \text{ т. е. } \underline{2x+3y-31=0.}$$

80. Подобно № 79, 1) $3x-2y-1=0$; 2) $5x-4y-1=0$.

81. На основаніи формулъ (20) и (18) имѣемъ: при $\lambda=1$ и $a=-1$: $x+y-1=0$.

82. Найдя середины сторонъ, проходящихъ черезъ вершину (1, 2), проводимъ черезъ нихъ прямую, именно: $x-y+1=0$. Ур-іе же стороны, противоположной этой вершинѣ, имѣетъ видъ: $x-y-1=0$. Обѣ прямыя $\parallel$ по формулѣ (18′).

83. $4x+5y+11\pm3\sqrt{41}=0$. Получается изъ условія:

$$\frac{4x+5y+11}{\pm\sqrt{4^2+5^2}}=3.$$

84. Угловой коэфф. данной прямой $=-\frac{4}{7}$, слѣд., на основаніи формулы (19), $a_1=\frac{7}{4}$, такъ что искомая прямая: $y-2=\frac{7}{4}(x-1)$, т. е. $7x-4y+1=0$.

85. Данное ур-іе, при $x=11$, даетъ: $y=8$. Угловой коэфф. искомой прямой $=-1:\frac{5}{7}=-\frac{7}{5}$; поэтому ея ур-іе: $y-8=-\frac{7}{5}(x-11)$, т. е. $7x+5y-117=0$.

86. Рѣшая ур-іе данной прямой совмѣстно съ условіемъ: $\sqrt{x^2+y^2}=10$, находимъ 2 точки: $(-5\sqrt{3}, 5)$ и $(5\sqrt{3}, -5)$. Угловой коэфф. данной прямой$=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, слѣд., у искомой $a_1=\sqrt{3}$, такъ что либо: $y-5=\sqrt{3}(x+5\sqrt{3})$ . . . . . (1), либо: $y+5=\sqrt{3}(x-5\sqrt{3})$ . . . . . (2).

87. $a_1=-1:\frac{3}{4}=-\frac{4}{3}$. Ур-іе $\perp$′а имѣетъ видъ: $y=-\frac{4}{3}x$. Его пересѣченіе съ данной прямой даетъ точку: $\left(-\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$.

88. *Не находя* точки пересѣченія, воспользуемся формулой (20): $(2-\lambda)x+(-1+3\lambda)y-(5+4\lambda)=0$ . . . (1). Взявъ условіе $\perp$'сти въ видѣ (19′), составляемъ вспомогательное ур-іе $(2-\lambda)5+(-1+3\lambda)2=0$, откуда $\lambda=-8$ и ур-іе (1) принимаетъ видъ: $10x-25y+27=0$.

89. По формулѣ (16) находимъ ур-ія сторонъ:

1) M_1M_2 . . . . . $3x-y-5=0$ . . . . . (1).

2) M_2M_3 . . . . . $x-2=0$ . . . . . (2).

3) M_1M_3 . . . . . $x-y-3=0$ . . . . . (3).

4) Ищемъ теперь ур-іе высоты h_3, т. е. прямой, проходящей чрезъ точку M_3 (2,—1) и $\perp$ M_1M_2. Поступая по образцу зад. № 84, пишемъ ур-іе h_3 . . . $y+1=a(x-2)$; угловой коэфф. M_1M_2 изъ ея ур-ія (1) $a_1=3$; слѣдовательно, условіе $\perp$'сти даетъ: $a=-\frac{1}{3}$, такъ что ур-іе h_3 будетъ: $y+1=-\frac{1}{3}(x-2)$; или окончательно: $x+3y+1=0$. . . (4).

5) Ур-іе высоты h_2, т. е. прямой, проходящей черезъ точку $M_2(2,1) \perp M_1M_3$, будетъ: $y-1=a(x-2)$; но $a=-\frac{1}{a_1}$, гдѣ $a_1=1$ (угловой коэфф. прямой (3)), слѣдоват. $a=-1$, и ур-іе h_2 . . . $y-1=-(x-2)$ или окончательно: $x+y-3=0$ . . . (5).

6) Ур-іе высоты h_1...$y+2=a(x-1)$; $a=-\frac{1}{a_1}$, гдѣ a_1 — угловой коэфф. прямой (2): $x-2=0$, т. е. $a_1=\infty$, такъ что $a=\frac{-1}{\infty}=0$; уравненіе h_1...$y+2=0.(x-1)$, или окончательно: $y+2=0$. . . (6).

Повѣрка: извѣстно, что всѣ 3 высоты должны встрѣчаться въ одной точкѣ (ортоцентрѣ); рѣшая ур-ія (5) и (6) совмѣстно, находимъ его коорд. (5,—2); рѣшая совмѣстно (4) и (5), находимъ ту-же точку пересѣченія.

90. Медіана m_1 — проходитъ чрезъ точку $M_1\,(1,-2)$ и черезъ середину отрѣзка M_2M_3; находимъ коорд. сказанной средины: $x=\frac{2+2}{2}=2$; $y=\frac{1-1}{2}=0$, т. е. точка (2,0). Теперь пишемъ ур-іе m_1... $\frac{x-1}{2-1}=\frac{y+2}{0+2}$; или окончат.: $2x-y-4=0$... (1).

Точно такъ же ур-іе медіаны m_2 ... $5x-y-9=0$... (2) и медіаны m_3... $\frac{x-2}{\frac{3}{2}-2}=\frac{y+1}{-\frac{1}{2}+1}$; или : $x+y-1=0$... (3).

3 медіаны должны пересѣчься въ одной точкѣ; дѣйствительно, рѣшая совмѣстно ур-ія (1), (2), (3), находимъ одну и ту-же точку пересѣченія $\left(\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

Повѣрка: на основаніи рѣш. № 30, коорд. той-же точки должны быть: $x=\frac{1+2+2}{3}$; $y=\frac{-2+1-1}{3}$, *ч. т. д.*

91. Найдя ур-ія сторонъ и коорд. ихъ серединъ, получаемъ, подобно № 89, искомыя ур-ія перпендикуляровъ:

$2x-9y+12=0$; $10x-4y+63=0$ и $18x-40y+111=0$.

Общая точка ихъ пересѣченія

$$\left(-\frac{519}{82}, -\frac{3}{41}\right)$$ *ч. т. д.*

92. Ур-іе данной стороны: $8x-15y+5=0$, ур-ія сторонъ $\perp$ къ ней: $15x+8y-388=0$ и $15x+8y-99=0$. Для 4-ой же стороны, подобно № 83, получаемъ 2 значенія (при $\delta=17$): $8x-15y+5\pm289=0$, такъ какъ на данной сторонѣ можно построить 2 квадрата: одинъ ближе къ началу, другой дальше отъ начала коорд.

93. Найдемъ середину данной діагонали и длину полудіагонали. Возставивъ изъ этой середины къ ней $\perp$, равный ея половинѣ, по обѣ стороны, находимъ остальныя 2 вершины, а затѣмъ, по формулѣ (16), и ур-ія сторонъ.

Отвѣтъ: ур-ія діагоналей: $x+2y=5$ и $y=2x$; ур-ія сторонъ:

$x-3y+10=0$; $x-3y=0$, $3x+y=0$ и $3x+y=10$.

94. По формулѣ (17): $tg\varphi=\frac{2}{11}$; $\varphi=10^\circ18'17'',4$.

95. 1) $tg\varphi=\frac{23}{2}$; $\varphi=85^0 1'48'',9$. 2) $tg\varphi=1$; $\varphi=45^0$.

96. Искомое ур-іе имѣетъ видъ: $y+1=a(x-1)$. Чтобы опредѣлить a, пользуемся формулой (17). Здѣсь, по заданію, $\varphi=30^0$, $a_1=-1$ (угловой коэфф. прямой: $x+y=2$) и потому:

$$tg30^0=\frac{a-(-1)}{1+a(-1)}, \text{ т. е.}$$

$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{a+1}{1-a}$, откуда: $a=\sqrt{3}-2$. Подставивъ это въ ур-іе прямой, найдемъ: $y+1=(\sqrt{3}-2)(x-1)$.

97. Найдя ур-ія сторонъ, опредѣляемъ по формуламъ (17):

1) $\varphi_1=30^0 57'49'',5$; $\varphi_2=40^0 36'4'',7$; $\varphi_3=108^0 26'5'',8$.

2) Для 2-го $\triangle$-ка:

$$\varphi_1=39^0 5'37'',9;\ \varphi_2=85^0 36'4'',7;\ \varphi_3=55^0 18'37'',4.$$

98. $x+6y-33=0$.

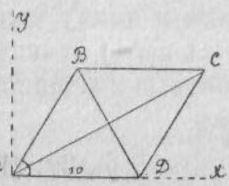
99. Обозначивъ коорд. искомой точки черезъ $(x_1, 0)$, пишемъ ур-ія прямыхъ, соединяющихъ ее съ каждой изъ 2-хъ данныхъ; они будутъ:

$$y=\frac{3}{2-x_1}(x-x_1) \text{ и } y=\frac{5}{-1-x_1}(x-x_1).$$

Условіе ихъ перпендикулярности, именно: $aa_1=-1$, даетъ: $x_1^2-x_1+13=0$, которое для x_1 даетъ мнимыя значенія, слѣд., искомыхъ точекъ нѣтъ.

99а. Подобно предыд., находимъ 2 точки: (2, 0) и (−3, 0).

100. Расположивъ коорд. оси, какъ показано на чертежѣ, пишемъ ур-іе AB:



$$y=\frac{3}{4}x \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

ур-іе CD . . . . . $y=\frac{3}{4}(x-10)$ . . . . (2)

Коорд. точки B находимъ изъ условія: $\sqrt{x^2+y^2}=10$. Рѣшая это совмѣстно съ ур-іемъ (1), опредѣляемъ: $x=8$; $y=6$.

Тогда ур-іе прямой BC, которая $\parallel AX$, будетъ: $y=6$ . . . (3). Рѣшивъ еще (3) совмѣстно со (2), находимъ коорд. точки C: (18, 6).

Теперь, пользуясь формулой (16), пишемъ ур-ія діагоналей: AC . . . $y=\frac{1}{3}x$ . . . (4) и BD . . . $y=-3(x-10)$ . . (5)

Сравнивая угловые коэфф. въ ур-іяхъ (4) и (5), заключаемъ по формулѣ (19), что діагонали взаимно $\perp$, *ч. т. д.*

101. Искомое ур-іе должно имѣть видъ формулы (21). Остается опредѣлить такъ наз. „параметры“ a, b и r, т. е. тѣ *постоянныя* величины, которыми отличается одна окружность отъ другой. Для ихъ нахожденія составляемъ 3 ур-ія, подставляя въ (21) коорд. точекъ, принадлежащихъ искомой окружности; итакъ, въ 1-мъ случаѣ:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ (0-a)^2+(0-b)^2=r^2,\ \text{т. е. } a^2+b^2=r^2 \\ (0-a)^2+(12-b)^2=r^2,\ \text{т. е. } a^2+b^2+144-24b=r^2 \\ (5-a)^2+(0-b)^2=r^2,\ \text{т. е. } a^2+b^2+25-10a=r^2 \end{array}\right\} \quad \ldots\ (1)$$

Рѣшивъ совмѣстно систему (1), находимъ: $a=2{,}5$; $b=6$; $r=6{,}5$; такъ что искомое ур-іе по формулѣ (21) будетъ:

$(x-2{,}5)^2+(y-6)^2=6{,}5^2$, или проще: $\underline{x^2+y^2-5x-12y=0}$.

2) Аналогично во 2-мъ случаѣ находимъ:

$$\underline{x^2+y^2-2{,}6x-7y=0}.$$

3) Аналогично въ 3-мъ случаѣ находимъ:

$$\underline{x^2+y^2-14x-4y=5}.$$

4) Аналогично въ 4-мъ случаѣ находимъ:

$$\underline{(x-7)^2+(y-4{,}5)^2=6{,}5^2}.$$

102. По формулѣ (21): $\underline{(x+4)^2+(y+6)^2=9}$.

103. Аналогично: $\underline{x^2+(y-5)^2=25}$.

104. Аналогично: $\underline{(x+4)^2+(y+3)^2=6}$.

105. Сперва находимъ: $r=\sqrt{(7-6)^2+(-5+2)^2}=\sqrt{10}$; тогда подобно № 102: $\underline{(x-6)^2+(y+2)^2=10.}$

106. По признаку (22′), сперва переписываемъ данное ур-іе въ видѣ: $x^2+y^2+\frac{3}{2}x-y=-\frac{1}{4}$, и составляемъ:

$4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-1\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2>0$ . . . окружность существуетъ; тогда по формуламъ (23) коорд. центра суть:

$$\underline{\left(-\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right)} \text{ и } r=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3}{4}.$$

107. Аналогично № 106: центръ: $(-7{,}5)$; $r=\sqrt{26}$.

107а. Мнимое мѣсто, по признаку (22′).

108. Аналогично № 106: центръ $\left(-\frac{15}{2},-\frac{21}{4}\right)$; $r=\frac{3}{4}\sqrt{159}$.

108а. Оба ур-ія не выражаютъ окружности (а другія кривыя 2-го порядка), такъ какъ не соотвѣтствуютъ ур-ію (22): именно коэфф. при x^2 и y^2 не равны по величинѣ и по знаку.

109. Подобно № 101, включая еще ур-іе: $b=3a-19$, находимъ: $x^2+y^2-14x-4y+37=0$.

110. Радіусы, проведенные въ точки касанія, служатъ абсциссой и ординатой центра, т. е. $a=b=r$.

Поэтому, подобно № 101, находимъ 2 окружности:

$$(x-15)^2+(y-15)^2=15^2 \text{ и } (x-3)^2+(y-3)^2=3^2.$$

111. Изъ свойствъ касательной выходитъ, что абсцисса центра тоже равна 4, т. е. $a=4$, а ордината его равна радіусу, т. е. $b=r$. Рѣшая подобно № 101, находимъ:

$$\underline{(x-4)^2+(y-17)^2=17^2.}$$

112. Найдя центръ и радіусъ подобно № 106, вычисляемъ разстояніе точки (5,5) отъ центра и убѣждаемся, что оно *меньше* радіуса, т. е. точка лежитъ *внутри* круга.

113. Найдя центръ данной окружности подобно № 106, находимъ по формулѣ (16) линію центровъ и ея пересѣченіе съ данной окружностью.

Разстоянія двухъ полученныхъ точекъ

$$\left(\frac{36}{5}, \frac{8}{5}\right) \text{ и } \left(-\frac{6}{5}, -\frac{48}{5}\right).$$

отъ новаго центра (9,4) будутъ радіусами искомыхъ окружностей:

$$(x-9)^2+(y-4)^2=3^2 \text{ и } (x-9)^2+(y-4)^2=17^2.$$

114. Точки: $(-8, 7)$ и $\left(\frac{41}{17}, -\frac{176}{17}\right)$; длина хорды=20,2368. Уголъ между радіусами по формулѣ (17): $\varphi = 144^\circ 18'$.

115. Проведемъ сперва радіусъ чрезъ эту точку по формулѣ (16), а потомъ къ нему въ этой же точкѣ возставимъ $\perp$. Получится хорда: $3x-5y=34$.

116. Аналогично предыд. находимъ хорду: $4x-3y=25$.

117. Найдя $r=7$, узнаемъ: $S=49\pi$.

118. Соотвѣтствующая ордината равна 5. Концы горизонтальнаго діам. имѣютъ коорд.: (13, 0) и (—13, 0). Найдя ур-ія хордъ по (16), видимъ, что признакъ (19) соблюденъ, *и. т. д.*

119. Отыскавъ вершины, т. е. точки пересѣченія съ осями коорд., опредѣляемъ:

$$a=10;\ b=6;\ c=8;\ e=\frac{4}{5};\ p=3{,}6 \text{ и } r_1=14;\ r_2=6.$$

120. $a=\sqrt{6};\ b=\sqrt{\frac{18}{7}};\ c=\sqrt{\frac{24}{7}};\ e=\sqrt{\frac{4}{7}};\ p=\frac{3}{7}\sqrt{6}.$

121. $2a=3\,.\,2c;\ a=3c;\ a^2=9(a^2-b^2)$ . . . . . (1)

$$\frac{b^2}{a}=16 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Изъ (1) и (2) находимъ a и b и тогда искомое ур-іе:

$$8x^2+9y^2=2592.$$

122. $\frac{x^2}{13^2}+\frac{y^2}{12^2}=1$ и $y^2=\frac{288}{13}x-\frac{144}{169}x^2$.

123. Данъ діаметръ: $y=\frac{21}{10}x$. По формулѣ (30) находимъ искомый: $y=-\frac{50}{189}x$.

124. Такъ какъ коорд. фокусовъ суть: (c, o) и $(-c, o)$, то разстояніе между ними по оси OX равно: $c-(-c)=2c$. Разстояніе же между вершинами эллипса, лежащими въ концахъ большой и малой оси, т. е. въ точкахъ, напр., (a, o) и (o, b), выражается: $d=\sqrt{(a-o)^2+(o-b)^2}=\sqrt{a^2+b^2}$. Согласно заданію, здѣсь: $\sqrt{a^2+b^2}=2c$, или $\sqrt{a^2+b^2}=2\sqrt{a^2-b^2}$, откуда $b^2=\frac{3}{5}a^2$. Подставляя это въ выраженіе искомаго эксцентриситета: $e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$, находимъ: $e=\frac{\sqrt{a^2-\frac{3}{5}a^2}}{a}=\underline{\sqrt{\frac{2}{5}}}$.

125. Угловой коэфф. діам. $=tg45^\circ=1$; его ур-іе: $y=x$. Рѣшая совмѣстно съ ур-іемъ эллипса, находимъ коорд. его концовъ, а затѣмъ и искомую длину $=\frac{4}{3}\sqrt{3}$.

126. $\frac{x^2}{225}+\frac{y^2}{144}=1$.

127. Взявъ формулу (24), имѣемъ по заданію:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{9}{4b^2}=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

и изъ (27), $c=1$, т. е. $a^2-b^2=1$ . . . . (2).

Рѣшая совмѣстно (1) и (2), находимъ искомое ур-іе:

$$\underline{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1.}$$

128. На основаніи (25) и (26) находимъ: $\underline{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1.}$

129. На основаніи (31) и (29) находимъ: $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{25}=1$.

130. На основаніи (32) и (26): $\rho = \frac{2}{\sqrt{2} + cs\varphi}$.

131. Аналогично: $\rho = \frac{5}{3 + 2cs\varphi}$.

132. Ур-іе діам., проходящаго черезъ данную точку, имѣетъ видъ: $y = \frac{1}{2}x$. Слѣд., ур-іе сопряженнаго діам. по (30): $y = -\frac{1}{2}x$. Искомая хорда $\parallel$ этому діаметру, а потому ея ур-іе: $x + 2y - 8 = 0$.

133. Тѣ точки, коорд. которыхъ придаютъ трехчлену $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$, отрицат. значеніе, лежатъ внутри соотв. эллипса, а тѣ, которыя дѣлаютъ его положительнымъ, лежатъ внѣ его. Можно поступить и иначе: по абсциссѣ данной точки найти изъ ур-ія эллипса соотв. ординату и сравнить ее съ ординатой данной точки; у какой абс. величина меньше, та ближе къ оси. По одному изъ этихъ способовъ находимъ, что 1-ая и 3-ья точка лежатъ внѣ эллипса, 2-ая внутри его, а 4-ая на немъ же.

134. Найдя: $a = 3$; $e = \frac{2}{3}$, пишемъ на основаніи (28):

$$3 + \frac{2}{3}x = 2\left(3 - \frac{2}{3}x\right) \quad . \quad . \quad . \ (1), \text{ откуда } x = \frac{3}{2}; \text{ или}$$

$$3 - \frac{2}{3}x = 2\left(3 + \frac{2}{3}x\right) \quad . \quad , \quad . \ (2), \text{ откуда } x = -\frac{3}{2}; \text{ т. е. 4 точки:}$$

$$\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{15}\right), \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{15}\right), \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{15}\right) \text{ и}$$

$$\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{15}\right).$$

135. Сведя къ виду (32) дѣленіемъ на 2, находимъ:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \text{ и } y^2 = 3x - \frac{3}{4}x^2.$$

136. Дано: $2\sqrt{a^2-b^2}=2\sqrt{ab}$; откуда $\frac{a}{b}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ или

$$b^2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}a^2;\ c^2=a^2-b^2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a^2;$$

$$e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}=0{,}78.$$

137. Ур-іе хорды: $y=-\frac{\sqrt{5}}{2}\left(x-2\right)$. Радіусъ векторъ, проведенный изъ праваго фокуса (c,o) $\perp$ этой хордѣ, имѣетъ ур-іе: $y=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-1\right)$. Точки его пересѣченія съ даннымъ эллипсомъ и будутъ искомыми:

$(0{,}64+0{,}24\sqrt{21};\ -0{,}24\sqrt{3}+0{,}48\sqrt{7})$ и $(0{,}64-0{,}24\sqrt{21};$ $-0{,}24\sqrt{3}-0{,}48\sqrt{7})$.

Другая пара точекъ, соотвѣтствующая радіусу вектору, проведенному изъ лѣваго фокуса $(-c,0)$, аналогично будетъ

$$(-0{,}64\pm0{,}24\sqrt{21};\ 0{,}24\sqrt{3}\pm0{,}48\sqrt{7}).$$

138. Ограничиваясь 1-ой четвертью (въ виду симметріи), пишемъ ур-іе 1-го радіуса вектора: $x=c$ . . . (1); такъ какъ онъ служитъ параметромъ, то точка его пересѣченія съ эллипсомъ будетъ (c,p).

Ур-іе 2-го радіуса вектора по формулѣ (16) будетъ:

$y=\frac{p}{2c}(x+c)$ . . . (2). По формулѣ (11) находимъ искомый:

$$ctg\varphi=tg\alpha=\frac{p}{2c};\ \varphi=arctg\frac{2c}{p}=arctg\left(2\frac{a}{b}\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2-1}\right).$$

138а. $r_1=p;\ r_2=2a-p=a+ec$.

139. Пользуясь свойствомъ впис. угла, опирающагося на діаметръ, описываемъ окружность, діаметромъ которой служитъ прямая, соединяющая фокусы и ищемъ пересѣченіе этой окружности: $x^2+y^2=16$ съ даннымъ эллипсомъ.

Полученныя 4 точки и будутъ искомыми: $\left(\frac{5\sqrt{7}}{4}, \frac{9}{4}\right)$,

$\left(\frac{5\sqrt{7}}{4}, -\frac{9}{4}\right)$, $\left(-\frac{5\sqrt{7}}{4}, \frac{9}{4}\right)$, $\left(-\frac{5\sqrt{7}}{4}, -\frac{9}{4}\right)$.

140. По свойству діагонали квадрата, пишемъ ея ур-іе: $y = tg45^0\ x$, т. е., $y = x$ . . . (1) и $y = -x$ . . . (2) . . для другой. Точки пересѣченія этихъ прямыхъ съ эллипсомъ и будутъ вершинами квадрата, а площадь его равна, очевидно, учетверенному квадрату любой изъ ихъ абсциссъ, т. е. $= \frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$.

141. Ур-іе стороны LM, проходящей черезъ точку L $(0,b)$ подъ угломъ 60^0 къ оси OX, имѣетъ видъ: $y-b=\sqrt{3}\ .\ x$ . . . (1). Ищемъ коорд. точки M ея пересѣченія съ эллипсомъ; рѣшая совмѣстно ихъ ур-ія, находимъ для точки M: $y = \frac{b^3-3a^2b}{b^2+3a^2}$; $x = \frac{-6a^2b}{\sqrt{3}\ (b^2+3a^2)}$. Длина стороны MN равна удвоенной абсциссѣ точки M, т. е. $\frac{12a^2b}{\sqrt{3}\ (b^2+3a^2)}$, а искомая площадь $= \frac{1}{2} MN^2\ .\ sn60^0 = \frac{12a^2b^2\sqrt{3}}{(b^2+3a^2)^2}$

142. $\pi ab - \pi b^2 = \pi b(a-b)$.

143. $\pi\ .\ 5\ .\ 3 = \pi r^2$; $r^2 = 15$. Ур-іе круга: $x^2+y^2=15$. Точки его пересѣченія съ даннымъ эллипсомъ суть:

$(1{,}25\sqrt{6};\ 0{,}75\sqrt{10})$; $(-1{,}25\sqrt{6};\ 0{,}75\sqrt{10})$; $(-1{,}25\sqrt{6};$ $-0{,}75\sqrt{10})$; и $(1{,}25\sqrt{6};\ -0{,}75\sqrt{10})$.

144. Ур-ія хордъ суть: $y=x-3$. . . (1) и $y=x+3$. . . (2). Найдя точки пересѣченія ихъ съ эллипсомъ и длины хордъ, убѣждаемся, что полученная фигура есть параллелограммъ. Площадь его опредѣляемъ по координатамъ вершинъ, какъ удвоенную площадь $\triangle$. Получается $S = \frac{960\sqrt{2}}{41}$.

145. Большая полуось впис. (на оси OY) $a_1 = 3$. Числовой эксц. обоихъ эллипсовъ $e = \frac{4}{5}$; слѣдоват., линейный эксц. впис. $c_1 = a_1 \cdot e = \frac{12}{5}$. Тогда $b_1^2 = a_1^2 - c_1^2 = \frac{81}{25}$ слѣд., искомое ур-іе: $\frac{x^2}{81/25} + \frac{y^2}{9} = 1$, т. е. $25x^2 + 9y^2 = 81$.

146. Конецъ искомаго діаметра, лежащій въ 1-ой четв., обозначимъ координатами (x_0, y_0). Имѣемъ ур-іе: $(x_0 - 2)^2 + y_0^2 = x_0^2 + (y_0 - 1)^2$ . . . (1). Рѣшая это совмѣстно съ ур-іемъ эллипса, находимъ точку $\left(\frac{12 + \sqrt{59}}{17}, \frac{4\sqrt{59} - 3}{34}\right)$. Искомый діаметръ: $y = \frac{4\sqrt{59} - 3}{24 + 2\sqrt{59}} x$; его длина $= \frac{2\sqrt{295}}{17}$.

147. Подставивъ коорд. данныхъ точекъ въ простѣйшее ур-іе эллипса, находимъ: $a^2 = 25$; $b^2 = 4$.

148. $e = \frac{4}{5}$. Искомое ур-іе: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

149. Обозначая разность прогрессіи черезъ d, имѣемъ: $a^2 = (a - d)^2 + (a - 2d)^2$, откуда $d = \frac{1}{5}a$, слѣд. $c = a - \frac{2}{5}a$; $e = \frac{3}{5}$.

150. По формуламъ (33), (40). (32): $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{49} = 1$; $y^2 = \frac{49}{4}x + \frac{49}{64}x^2$; $\rho = \frac{49}{8 + \sqrt{113}\cos\varphi}$.

151. $2a = 12$; $2b = 14$.

152. $2c = 10$; $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

153. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$.

154. Невозможна, такъ какъ для гиперболы $e > 1$.

155. $r_1 = \frac{5}{3}x - 3$, $r_1 = \frac{5}{3}x + 3$. Взявъ, по условію, $r_1 = 2r_2$, т. е. $\frac{5}{3}x - 3 = 2\left(\frac{5}{3}x + 3\right)$, находимъ: $x = -\frac{27}{5}$, соотвѣтствующій ему y на ур-ія гиперболы оказывается: $y = \pm\frac{8}{5}\sqrt{14}$; если же взять, что́ также возможно по смыслу вопроса, $\frac{5}{3}x + 3 = 2\left(\frac{5}{3}x - 3\right)$, т. е. $r_2 = 2r_1$, то $x = \frac{27}{5}$; $y = \pm\frac{8}{5}\sqrt{14}$, т. е. всего 4 точки:

$$\left(\frac{27}{5}, \frac{8}{5}\sqrt{14}\right); \left(\frac{27}{5}, -\frac{8}{5}\sqrt{14}\right); \left(-\frac{27}{5}, \frac{8}{5}\sqrt{14}\right);$$

$$\left(-\frac{27}{5}, -\frac{8}{5}\sqrt{14}\right).$$

156. $\frac{x^2}{16} - \frac{21y^2}{2500} = 1$.

157. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$.

158. По форм. (39): $y = \frac{3}{4}x$.

159. Середина хорды лежитъ на сопряженномъ съ нею діаметрѣ; слѣд., его ур-ie: $y = \frac{3}{12}x$.

Угловой коэфф. хорды, съ нимъ сопряженной, на основаніи (39) равенъ $\frac{64}{9}$, слѣд., ея ур-ie: $y - 3 = \frac{64}{9}(x - 12)$.

160. Аналогично: $y + 1 = -\frac{15}{4}(x - 3)$.

161. По формулѣ (38) ур-ія ассимптотъ суть: $y = x$ и $y = -x$; $tg\varphi = \frac{1+1}{1-1}$; $\varphi = 90^\circ$.

162. $\varphi = arctg\, 4\sqrt{5}$.

163. Каждый радіусъ векторъ проходитъ черезъ 2 извѣстныя точки: заданную и фокусъ. Написавъ ихъ ур-ія, находимъ $\varphi = 24^\circ\ 11'\ 57''$.

164. Подобно рѣш. № 155, получаются 4 точки:

$$\left(\frac{4}{5}\sqrt{34}, \frac{9}{5}\right), \left(-\frac{4}{5}\sqrt{34}, \frac{9}{5}\right), \left(-\frac{4}{5}\sqrt{34}, -\frac{9}{5}\right)$$

и $$\left(\frac{4}{5}\sqrt{34}, -\frac{9}{5}\right).$$

165. $(6, 2\sqrt{3})$, $(-6, 2\sqrt{3})$, $(-6, -2\sqrt{3})$, $(6, -2\sqrt{3})$.

166. Формулы (37) даютъ: $17x^2 = 116 \cdot 16$, откуда $x = \pm 10{,}449$; тогда $y = \pm 2{,}413$. Всѣхъ точекъ 4.

167. $2a \cdot 3 = \sqrt{a^2 + b^2}$; $a = \sqrt{\frac{1}{2}}$; искомыя ур-ія:

$$2x^2 - \frac{y^2}{4} = 1;\ y^2 = (8\sqrt{2})x + 8x^2;\ \rho = \frac{4\sqrt{2}}{1 + 3cs\varphi}.$$

168. Для даннаго эллипса: $a^2 = 8$; $b^2 = 5$; слѣдоват., $a = 2\sqrt{2}$; $c = \sqrt{8-5} = \sqrt{3}$. Такимъ образомъ для эллипса коорд. праваго фокуса $(\sqrt{3}, 0)$ и правой вершины: $(2\sqrt{2}, 0)$. По заданію, точка $(\sqrt{3}, 0)$ служитъ для гиперболы вершиною, а $(2\sqrt{2}, 0)$ — фокусомъ, поэтому для гиперболы $a = \sqrt{3}$, $c = 2\sqrt{2}$; откуда: $a^2 = 3$; $b^2 = c^2 - a^2 = 8 - 3 = 5$; ур-іе гиперб.: $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1$.

169. Аналогично: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

170. Подобно № 140, вершины: $\left(\frac{15}{4}, \frac{15}{4}\right)$ и ей симметричныя точки. Площадь равна $\frac{225}{4}$.

171. Точка $\left(\frac{ab}{\sqrt{b^2-a^2}}, \frac{ab}{\sqrt{b^2-a^2}}\right)$ и ей симметричныя. Площ. $= \frac{4a^2b^2}{b^2-a^2}$. Задача возможна только при $b > a$.

172. Подобно № 141, находимъ: 1) $y = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x + \sqrt{\frac{10}{3}}\right)$ 2) $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x + \sqrt{\frac{10}{3}}\right)$; 3) $x = \frac{5}{4}\sqrt{\frac{10}{3}} + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{15}{2}}$.

173. $y = \frac{1}{5}\sqrt{15}\, x$ и $y = -\frac{1}{5}\sqrt{15}\, x$. (По формуламъ (38)).

174. $y = \frac{1}{3}x$ и $y = -\frac{1}{3}x$.

175. $c = 4$; подобно № 153, находимъ: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$.

176. $y^2 = \frac{16}{3}x$.

177. $r = 24 + \frac{3}{2} = \frac{51}{2}$.

178. По формулѣ (42): $y^2 = 3x$.

179. По формулѣ (44): $y^2 = 6x$.

180. Стороны: $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$; $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$; $x = 33$.

181. По формулѣ (43): $\frac{7}{2m} = 3$; $m = \frac{7}{6}$; хорды: $y - 3 = \frac{7}{6}(x - 5)$.

182. $y-3=x-4$.

183. По формулѣ (42): $x+\frac{12}{2}=14$; $x=8$; $y=\pm 8\sqrt{3}$; $d=16$.

184. По формулѣ (42): $x+\frac{6}{2}=15$; $x=12$; $y=\pm 12$; $\varphi=90^0$.

185. По формулѣ (43): $y=\frac{3}{2}$.

186. „ „ „ $y=5$.

187. $x^2+y^2=\frac{9}{4}$; ур-іе хорды: $x=\frac{3}{2}(\sqrt{5}-2)$; длина ея: $6\sqrt{\sqrt{5}-2}$.

188. Опредѣливъ точки пересѣченія хорды: $y=x-\frac{5}{6}$ съ параболой, вычисляемъ длину хорды, служащей діагональю полученнаго 4-уг. (трапеціи). Но діагонали взаимно $\perp$ и равны, слѣд. $S=\frac{1}{2}d^2=\frac{200}{9}$.

189. Если сторону кв. обозначимъ черезъ a, то для той его вершины, которая лежитъ на параболѣ въ 1-омъ углѣ, коорд. будутъ: $y=\frac{a}{2}$; $x=\frac{p}{2}-a=3-a$. Тогда имѣемъ: $\frac{a^2}{4}=12(3-a)$, откуда $a=12(\sqrt{5}-2)$; $S=a^2=144(9-4\sqrt{5})$.

190. По формулѣ (45): $4x+3y=75$.

191. По формулѣ (46) и (50): $2\sqrt{3}x+3y+12=0$ . . . касат.

и $y+1=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ . . . нормаль.

192. По формуламъ (48) и (52), касат.: $y=-3\left(x+\frac{2}{3}\right)$ и нормаль: $y+4=\frac{1}{3}\left(x-\frac{2}{3}\right)$.

193. По формулѣ (47): $2x \pm y\sqrt{2}=10$.

194. Концы хорды суть: (2, 1) и (—1, —2). Соотв. касательныя: $2x+y=5$ и $x+2y+5=0$.

195. Такъ какъ данная точка является вершиной, то, очевидно, касательной служитъ: $x=2$, а нормалью ось X, т. е. $y=0$.

196. Взявъ изъ (46) угловой коэфф. касат. въ видѣ:

$$-\frac{b^2x_0}{a^2y_0},$$ составляемъ ур-іе: $$-\frac{b^2 \cdot 2}{a^2 \cdot (-1)}=\frac{1}{3} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

и кромѣ того: $$\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Изъ (1) и (2) находимъ a и b, и тогда ур-іе эллипса оказывается: $\frac{x^2}{10}+\frac{3y^2}{5}=1$, а нормали: $y+1=-3(x-2)$.

197. Изъ формулы (48) угловой коэфф. равенъ $\frac{p}{y_0}$, слѣд., $\frac{4}{3y_0}=\frac{4}{3}$, откуда $y_0=1$; $x_0=\frac{3}{8}$. По формулѣ (52) находимъ ур-іе нормали: $y-1=-\frac{3}{4}\left(x-\frac{3}{8}\right)$.

198. Подобно предыд., имѣемъ:

$$\frac{15}{2y_0}=1;\ y_0=\frac{15}{2};\ x_0=\frac{15}{4}.$$

199. $\frac{11}{2y_0}=-\sqrt{3}$; $y_0=-\frac{11}{2\sqrt{3}}$; $x_0=\frac{11}{12}$.

200. Написавъ ур-ія касат. и нормали, опредѣляемъ точки ихъ пересѣченія съ осью OX, именно $(-20, 0)$ и $\left(\frac{45}{2}, 0\right)$, а затѣмъ разстоянія отъ точки касанія до каждой изъ этихъ точекъ.

Получается: 1) длина касат. $=10\sqrt{17}$; 2) длина нормали $=\frac{5}{2}\sqrt{1}$; 3) по формулѣ (55) длина подкасат. $=40$; 4) по (57) поднормаль $=\frac{5}{2}$. Болѣе простой способъ см. № 201.

201. Сперва примѣняемъ формулы (55) и (57):

1) подкасат. $=14$; 2) поднормаль $=5$; 3) узнавъ ординару y_0, пишемъ: длина касат. $=\sqrt{14^2+y_0^2}=\sqrt{266}$; длина нормали $=\sqrt{5^2+y_0^2}=\sqrt{95}$.

202. Изъ формулы (48) беремъ угловой коэфф. и, въ виду параллельности, имѣемъ:

$$\frac{5}{2y_0}=\frac{3}{2};\ y_0=\frac{5}{3};\ \text{искомая касат.: } \frac{5}{3}y=\frac{5}{2}\left(x+\frac{5}{9}\right).$$

203. Ур-ія касат. . . . $7x-3y=116$; нормали . . . $3x+7y=0$; длины: касат. . . . . $\frac{\sqrt{2088}}{7}$; нормали . . . . . $r=\sqrt{232}$.

204. 10. (По формулѣ (53), полагая $a=r=12$).

205. Переписавъ (45) въ функціональномъ видѣ, и сравнивая коэффиціенты, имѣемъ:

$$-\frac{x_0}{y_0}=3\ \ldots\ (1);\ \frac{r^2}{y_0}=-5\ \ldots\ (2)\ \text{и для круга: } x_0^2+y_0^2=r^2\ \ldots\ (3).$$

Рѣшая совмѣстно (1), (2) и (3), находимъ r, и искомое ур-іе круга: $x^2+y^2=\frac{5}{2}$.

206. Отрѣзки: $\frac{7}{5}$ и $\frac{7}{2\sqrt{5}}$.

207. Подобно № 201 и 200: подкасат. $=2{,}25$; поднорм. $=0{,}64$; длина касат. $=2{,}55$ и дл. нормали $=1{,}36$.

208. Подобно № 202, сравниваемъ коэфф., и зная, что (x_0, y_0) лежитъ на данной кривой, находимъ 2 точки касанія и соотвѣт. 2 касат. $4x-3y\pm\sqrt{107}=0$.

209. Найдя угловые коэфф. (для касат. и радіусовъ векторовъ они соотв. равны: $-\frac{9}{20}$, $-\frac{12}{5}$ и $\frac{12}{35}$), опредѣляемъ по формулѣ (17): $tg\varphi=\frac{15}{16}=tg\varphi_1$, что треб. д.

210. Точка касанія: (5,3). Рѣшаемъ совмѣстно оба ур-ія.

211. $15x+26y=694{,}2$; длина $=1{,}28\sqrt{901}$.

212. Подобно № 201, находимъ:

1) подкасат. $=\frac{9}{4}$; 2) поднормаль $=\frac{57}{7}$;

3) длина касат. $=\frac{3}{4}\sqrt{47}$; 4) длина нормали $=\frac{4}{7}\sqrt{319}$.

213. Такъ какъ внѣшній уголъ равенъ суммѣ внутреннихъ, съ нимъ несмежныхъ, то получается равнобедр. $\triangle$, и одинъ изъ радіусовъ векторовъ равенъ разстоянію между фокусами. Если выбрать точку въ 1-ой четверти, то:

$$ex_0-a=2c, \text{ откуда } x_0=\frac{(2c+a)a}{c}=\frac{39}{5}.$$

Соотв. изъ ур-ія гиперболы $y_0=\frac{48}{5}$, и тогда длина субнормали $=\frac{208}{15}$, а длина нормали $=\frac{16}{3}\sqrt{10}$.

214. Изъ формулы (56) точка $\left(\frac{24}{5}, \sqrt{119}\right)$ и еще три ей симметричныя.

215. $\left(\frac{25}{\sqrt{21}}, \frac{4}{\sqrt{21}}\right)$ и еще три ей симметричныя.

216. Боковыя стороны наклонены къ оси OX подъ углами 60° и 120°, а основаніе $\parallel OX$. Поэтому взявъ изъ формулы (45) выраженіе углового коэфф., имѣемъ для каждой изъ точекъ касанія:

1) $-\frac{x_0}{y_0}=\sqrt{3}$; $x_0^2+y_0^2=25$; $x_0=-\frac{5\sqrt{3}}{2}$; $y_0=\frac{5}{2}$;

2) $-\frac{x_0}{y_0}=-\sqrt{3}$; $x_0^2+y_0^2=25$; $x_0=\frac{5\sqrt{3}}{2}$; $y_0=\frac{5}{2}$;

3) $x_0=0$; $y_0=-5$.

Такимъ образомъ ур-ія сторонъ будутъ:

$$\underline{-x\sqrt{3}+y=10};\quad \underline{x\sqrt{3}+y=10}\ \text{и}\ \underline{y=-5}.$$

217. Если точка

$$A(-5,10),\ \text{то}\ B(5,10),\ C(20,-10),\ D(-20,-10);$$

получается: $10+40=25+25$.

218. Ур-ія 2-хъ сторонъ пишемъ сразу: $x=20$ и $x=-20$. Прочія же стороны попарно $\parallel$, и наклонены къ OX подъ угломъ 30^0 и 150^0. Поэтому, подобно № 216, находимъ точки касанія:

1) $-\frac{x_0}{y_0}=\frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $-\frac{x_0}{y_0}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$; $x_0^2+y_0^2=400$;

$x_0=\pm 10$; $y_0=\pm 10\sqrt{3}$,

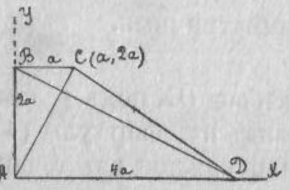
слѣд., 4 касат.:

$x+y\sqrt{3}=40$; $x-y\sqrt{3}=40$; $-x+y\sqrt{3}=40$ и $x+y\sqrt{3}=-40$.

219. Точки пересѣченія: $\left(5,\ \frac{9}{4}\right)$ и $\left(5,\ -\frac{9}{4}\right)$. Проведя касат. къ обѣимъ кривымъ въ 1-ой точкѣ, находимъ:

$$tg\varphi=\frac{4}{5}.$$

220. Примемъ AD за ось X, AB—за ось Y и обозначимъ меньшее основаніе $BC=a$. Тогда по заданію, коорд. точекъ B, C, D, вполнѣ опредѣляются, и пользуясь формулой (16), пишемъ ур-ія діагоналей: $AC\ldots y=2x$ и



$$BD\ldots y=-\frac{1}{2}(x-4a)$$

ихъ угловые коэфф. въ виду формулы (19), указываютъ, что линіи $\perp$, ч. т. д.

221. Рѣшивъ совокупно оба ур-ія, находимъ точки пересѣченія и вычисливъ разстояніе любой изъ нихъ отъ общаго центра, подставляемъ значеніе r въ искомое:

$$x^2+y^2=\frac{4608}{337} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Другой способъ: Упростивъ каждое ур-іе, и умноживъ 2-е на λ, составляемъ подобно формулѣ (20), ур-іе пучка кривыхъ 2-го порядка, проходящихъ черезъ точки пересѣченія 2-хъ данныхъ. Въ полученномъ ур-іи:

$$(9+16\lambda)x^2+(16-9\lambda)y^2-144(1+\lambda)=0,$$

для того, чтобъ оно выражало окружность, должны быть равны коэфф. $9+16\lambda=16-9\lambda$, откуда находимъ $\lambda=\frac{7}{25}$.

При этомъ значеніи (2) принимаетъ видъ (1).

222. Коорд. оси служатъ діагоналями, а потому стороны наклонены къ оси OX подъ угломъ въ 45° и 135°. Взявъ угловой коэфф. изъ формулы (46), имѣемъ поэтому:

$$-\frac{9x_0}{16y_0}=\pm 1 \text{ и } \frac{x_0^2}{16}+\frac{y_0^2}{9}=1,$$

откуда находимъ всѣ 4 точки касанія (во всѣхъ четвертяхъ).

Теперь, снова взявъ формулу (46), находимъ и ур-ія сторонъ: $x+y=5$; $-x+y=5$; $x+y=-5$ и $x-y=5$.

Такъ какъ отрѣзки на осяхъ $=5$, то площ. $=50$ кв. ед.

223. Такъ какъ двѣ стороны служатъ радіусами векторами концовъ третьей стороны, то по (42) слѣдуетъ:

$$x_0+2=\pm 2y_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

и по заданію: $$y_0^2-8x_0=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Рѣшая (1) и (2) совокупно, находимъ 4 системы рѣшеній, т. е. по 2 группы значеній для остальныхъ вершинъ:

1) $(14+8\sqrt{3},\ 8+4\sqrt{3})$ и $(14+8\sqrt{3},\ -8-4\sqrt{3})$

при одномъ расположеніи; и

2) $(14-8\sqrt{3},\ 8-4\sqrt{3})$ и $(14-8\sqrt{3},\ -8+4\sqrt{3})$

при другомъ.

224. Точки касанія суть: $(2\sqrt{2}, 2)$ и 3 ей симметричныя. Поэтому ур-ія сторонъ:

$$1)\ x\sqrt{2}+2y=8;\ 2)\ -x\sqrt{2}+2y=8;\ 3)\ x\sqrt{2}+2y=-8;$$
$$x\sqrt{2}-2y=8.$$

а площадь, по отрѣзкамъ на осяхъ $=32\sqrt{2}$.

225. Рѣшая совокупно: $x^2+y^2=r^2$ и $y^2=4rx$, находимъ точки пересѣченія; искомая длина равна удвоенной ординатѣ

$$=r\sqrt{\sqrt{5}-2}=1{,}943r.$$

226. По свойству геом. мѣстъ, для любой точки (x, y) искомаго $\perp$ существуетъ зависимость:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=(x-m)^2+(y-n)^2, \text{ т. е.}$$
$$2(a-m)x+2(b-n)y+m^2+n^2-a^2-b^2=0.$$

227. Ур-іе одной стороны: $y=r$ . . . (1). Слѣдующая наклонена къ оси OX подъ угломъ 162^0. Поэтому, подобно № 216, имѣемъ: $-\frac{x_0}{y_0}=tg162^0=-0{,}325$.

Подставивъ это въ ур-іе: $x_0^2+y_0^2=r^2$, находимъ: $x_0=0{,}309r$ и $y_0=0{,}951r$, такъ что ур-іе стороны:

$$309x+951y=1000r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Для слѣдующей стороны коорд. точки касанія можно опредѣлить проще: въ полярныхъ коорд.

$$x_0=rcs144^0=-0{,}809r;\ y_0=rsn144^0=0{,}588r$$

такъ что ея ур-іе:

$$-809x+588y=1000r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Для остальныхъ 2-хъ сторонъ точки касанія симметричны съ найденными, имѣя тѣ-же абсциссы, но противоположныя ординаты; будетъ:

$$809x+588y=-1000r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

и

$$309x-951y=1000r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

228. Пишемъ условіе: $\sqrt{(x-a)^2+y^2} = m\sqrt{(x-b)^2+y^2}$, откуда, по упрощеніи:

$$x^2+y^2-2\frac{m^2a-b}{m^2-1}x=a^2-m^2b^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Это ур-іе, согласно формуламъ (22) и (22′), представляетъ окружность, съ центромъ $\left(\frac{m^2a-b}{m^2-1},\ 0\right)$.

Изъ элем. геометріи извѣстно, что такимъ мѣстомъ служитъ Аполлоніева окружность *).

229. Чтобъ найти концы хордъ, узнаемъ пересѣченіе даннаго эллипса съ окружностью: $\sqrt{(x-2)^2+y^2}=\frac{1}{2}$.

Будутъ точки:

$$\left(\frac{8-\sqrt{7}}{3},\ \frac{\sqrt{16\sqrt{7}-35}}{6}\right) \text{ и } \left(\frac{8-\sqrt{7}}{3},\ -\frac{\sqrt{16\sqrt{7}-35}}{6}\right).$$

По формулѣ (16) пишемъ ур-іе хорды и по (11) узнаемъ

$$tg\alpha = \pm\frac{(4-\sqrt{7})\sqrt{16\sqrt{7}-35}}{9}.$$

230. Пользуясь формулами (38), пишемъ ур-ія $\perp$-овъ, опущенныхъ изъ фокусовъ на ассимптоты, и коорд. ихъ основаній. Полученный 6-угольникъ представляетъ 2 равныя трапеціи, съ меньшимъ основаніемъ $=\frac{2a^2}{c}$, и большимъ $=2c$, такъ что искомая площадь

$$S=2\left(\frac{a^2}{c}+c\right)\frac{ab}{c}=\frac{2ab(2a^2+b^2)}{a^2+b^2}.$$

---

*) См. «Дополненія къ Курсу Элемент. Геометріи». А. Штрайхмана, стр. 56—57.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ.

Основанія анализа безконечно малыхъ.

ВВЕДЕНІЕ.

Понятіе о безконечно малыхъ величинахъ является однимъ изъ краеугольныхъ въ высшей математикѣ. Чтобы представить его въ возможно болѣе ясной и конкретной формѣ, слѣдуетъ остановиться на различіи между нимъ и понятіемъ о малой, но конечной, величинѣ. Для этой цѣли воспользуемся предварительно слѣдующей схемой.

Вообразимъ себѣ, что въ одномъ и томъ же помѣщеніи, съ постоянной температурой 1^0 выше нуля, находятся два шарика: одинъ—стекляный, весьма малаго діаметра; объемъ его данъ ε; другой—ледяной, немного большаго размѣра; его объемъ назовемъ v.

Для простоты положимъ, что таяніе происходитъ весьма медленно, равномѣрно по всей поверхности, и образовавшаяся вода сейчасъ же испаряется. Очевидно, при такихъ условіяхъ ε является величиной постоянной, а v — непрерывно уменьшается; поэтому непремѣнно наступитъ моментъ, когда v сравняется съ ε, а затѣмъ ужъ будетъ $v<\varepsilon$. Эта постоянная величина ε, хотя бы и весьма малая, называется *конечной*, въ отличіе отъ перемѣнной v; а такая перемѣнная v, которая, непрерывно уменьшаясь, можетъ стать и оставаться меньше любой напередъ заданной величины ε, называется *безконечно малой*.

Для большей наглядности различія между ними, представимъ себѣ еще рядъ ситъ съ круглыми отверстіями: у 1-го діаметръ отверстія равенъ 1 миллим., у 2-го—0,1 миллим., у 3-го—0,01 миллим. и т. д., причемъ всѣ сита расположены горизонтально одно подъ другимъ, такъ что первое на самомъ верху, подъ нимъ второе и т. д. Если на верхнее положить оба шарика и затѣмъ встряхивать, то, конечно, стекляный шарикъ, объемомъ ε, на какомъ-нибудь ситѣ остановится, между тѣмъ какъ v послѣдовательно будетъ проходить ихъ одно за другимъ, пока не сойдетъ на нѣтъ, т. е., объемъ *льда* не обратится въ нуль.

Само собою разумѣется, что, въ сущности, понятіе о безконечно малыхъ есть чисто отвлеченное, такъ какъ на самомъ дѣлѣ, въ физическомъ смыслѣ всякое дѣленіе вещества на части не можетъ продолжаться безконечно *).

Настолько же отвлеченнымъ является понятіе о безконечно большихъ величинахъ, т. е., о безконечности. Безконечностью наз. такая *перемѣнная* величина, которая, непрерывно увеличиваясь, можетъ превзойти какую угодно напередъ заданную величину (т. е., постоянную, называемую, въ отличіе отъ нея, конечной). Напр., если массу одного грамма дробить на безконечно малыя части, то *число* такихъ частей будетъ безконечно велико; изъ этого, между прочимъ, слѣдуетъ, что произведеніе безконечно малой на безконечно большую можетъ равняться конечному числу.

Предѣлъ безконечно малой величины есть нуль, а безконечно большія *не имѣютъ предѣла* (символъ ∞ не обозначаетъ постоянной величины). Безконечное малыя величины, вообще, очень отличаются другъ отъ друга, и даже можетъ одна быть въ безконечно большое число разъ больше другой (тогда вторая наз. безконечно малой высшаго порядка). Точно такъ же и безконечно большія величины не всѣ равны между собой, и выраженіе: $\infty - \infty$ есть величина неопредѣленная.

Несмотря на всю отвлеченность и кажущуюся искусственность „анализа безконечно малыхъ“, методъ этотъ имѣетъ

*) При современномъ состояніи науки границей считаются ужъ не атомы, а ихъ части—«электроны».

за собою то огромное практическое преимущество, что при сложной зависимости между нѣсколькими разсматриваемыми величинами (именно, непрерывными функціями), намъ достаточно прослѣдить связь между ихъ безконечно малыми измѣненіями (именно, т. наз. дифференціалами), которая всегда значительно проще, такъ что легче уловима и можетъ быть выражена уравненіемъ. Полученныя ур-ія, путемъ интегрированія даютъ искомыя формулы, имѣющія значеніе общихъ законовъ.

Благодаря этому, описанный методъ явился могучимъ орудіемъ развитія современной техники и естествознанія.

ГЛАВА I.

ОТЫСКАНІЕ ПРЕДѢЛОВЪ ФУНКЦІЙ.

§ 1. Основныя правила и формулы.

а) Кромѣ извѣстныхъ теоремъ: предѣлъ суммы равенъ суммѣ предѣловъ, предѣлъ произведенія равенъ произведенію пред. и др., для отысканія предѣла примѣняются способы: „предварительнаго сокращенія“ (см. рѣш. № 231), „вспомог. множителей“ (см. рѣш. № 233), и наиболѣе употребительный способъ „подстановки новыхъ перемѣнныхъ“, причемъ слѣдуетъ обращать вниманіе, къ какому *новому* значенію стремится *новое* нез. перем. (см. № 241).

b) Извѣстно, что пред. $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ при $m=\pm\infty$ равенъ e...(1).

Пред. $\frac{\sin x}{x}$ при $x=0$ равенъ 1 . . . (2). Также придется ссылаться на формулу: пред. $\frac{lg(1+\alpha)}{\alpha}$ при $\alpha=0$ равенъ 1 . (3). (См. рѣш. № 243).

§ 2. Задачи на отыскание предѣловъ $y = f(x)$.

231. $\frac{x^2-3x+2}{5x-x^2-6}$, при $x=2$. **232.** $\frac{x^2-8x+15}{3x^2-7x-6}$, при $x=3$.

*__233.__ $\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{x}$, при $x=0$.

234. $\frac{1-\sqrt{1-sn^3x}}{x^3}$, при $x=0$.

*__235.__ $\sqrt{x^2+x+\sqrt{x^2+x+\sqrt{x^2+x+}}}$ . . . до ∞.

236. $\sqrt{x^2-x+\sqrt{x^2-x+\sqrt{x^2-x+}}}$ . . . до ∞.

237. $\frac{(x+1)^3-8}{x-1}$, при $x=1$.

*__238.__ $\frac{1+\sqrt{1+4x^2}}{x}$, при $x=\infty$.

*__239.__ $\left(1+\frac{2}{n}\right)^{3n}$, при $n=\infty$.

240. $\left(1+\frac{2}{3}n\right)^{\frac{4}{5n}}$, при $n=\infty$.

*__241.__ $x^{\frac{1}{x-1}}$, при $x=1$. *__242.__ $\frac{1-csx}{x^2}$, при $x=0$.

*__243.__ $\frac{lg(1+\alpha)}{\alpha}$, при $\alpha=0$. **244.** $\frac{lg(1+5x)}{3x}$, при $x=0$.

245. $x \cdot sn\frac{\pi}{x}$, при $x=\infty$.

*__246.__ $tg2x \cdot tg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$, при $x=\frac{\pi}{4}$.

247. $(1+3sn^2x)^{-4csc^2x}$, при $x=0$.

*248. $\left(\frac{3m-4}{3m+1}\right)^{m-2}$, при $m=\infty$.

249. $\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$, при $n=\infty$.

250. $(1-x^2)^{\frac{2}{x^2}}$, при $x=-\infty$.

*251. $\frac{(1+\alpha)^n-1}{\alpha}$, при $\alpha=0$; $n=const.$

252. $(lgx)^{\frac{6}{1-lgx}}_{x=e}$. 252а. $(1+x)^{\frac{1}{x}}$, при $x=0$.

*253. Принимая $S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$, найти предѣлъ S_n при $n=\infty$.

254. То же для суммы: $S_n=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+2)}$.

*255. То же для $S_n=sn\frac{\pi}{n^2}+sn\frac{2\pi}{n^2}+\ldots+sn\frac{(n-1)\pi}{n^2}$.

*256. То же для произведенія: $P_n=\left(1+tg\frac{\pi x}{n^2}\right)\left(1+tg\frac{2\pi x}{n^2}\right)\ldots\left(1+tg\frac{(n-1)\pi x}{n^2}\right)$.

ГЛАВА II.

ПРОИЗВОДНЫЯ ОТЪ ФУНКЦІЙ.

§ 3. Основныя понятія и формулы.

Для уясненія смысла связи между функціей и ея производной полезно привести нѣсколько примѣровъ подобнаго-же соотношенія, но въ болѣе наглядной формѣ.

Если допустимъ, что съ какого нибудь поля собрано 600 пуд. зерна, а засѣяно было всего 100 пуд., то отношеніе:

$\frac{600}{100}$, т. е., такъ наз. урожай „самъ—шестъ“, даетъ понятіе о *производительности* даннаго поля при данныхъ условіяхъ. Точно такъ же о достоинствахъ той или другой машины часто можно судить по ея *продуктивности*, напр., по количеству перерабатываемаго матеріала въ сутки, или же по коэффиціенту полезнаго дѣйствія, т. е., отношенію получаемой работы къ затрачиваемой. При этомъ замѣтимъ, что производительность одной и той же машины, при одной и той же конструкціи, зависитъ, конечно, и отъ матеріала, съ которымъ она имѣетъ дѣло, не говоря ужъ объ уходѣ и пр. внѣшнихъ условіяхъ.

Если, установивъ такую точку зрѣнія, обратимся къ какой нибудь наглядно представленной функціи, какъ, напр., $y=\pi x^2$ (площадь круга радіуса x), то, чтобы судить объ этой функціи, прежде всего изберемъ какія нибудь „внѣшнія условія“, напр., положимъ: $x=10$. За своеобразную „работу“ функціи мы должны принять, какъ это условлено, результатъ ея измѣненія съ измѣненіемъ x, т. е., величину приращенія $\triangle y$, соотвѣтствующаго заданному $\triangle x$. Мѣриломъ же способности функціи къ измѣненію, т. е., своего рода работоспособности или *производительности* функціи, является, очевидно, отношеніе $\frac{\triangle y}{\triangle x}$; напр., въ данномъ случаѣ, при $\triangle x=2$, будетъ: $\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{\pi(10+2)^2-\pi\,.\,10^2}{2}=22\pi$, а при $\triangle x=1$, будетъ: $\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{\pi(10+1)^2-\pi\,.\,10^2}{1}=21\pi$.

Чтобы, по возможности, устранить вліяніе „внѣшнихъ условій“, т. е., въ данномъ случаѣ, произвольности выбора $\triangle x$, *условились брать* $\triangle x$ *безконечно малымъ* и тогда пред $\left(\frac{\triangle y}{\triangle x}\right)$, при $\triangle x=0$, назыв. производной отъ y по x.

При x, фиксированномъ на 10, эта производная выразится:

пред. $\left(\frac{\pi(10+\triangle x)^2-\pi 10^2}{\triangle x}\right)_{\text{при }\triangle x=0}$ $=$ пр. $\left(\frac{20\pi\triangle x+\pi\,.\,\triangle x^2}{\triangle x}\right)_{\triangle x=0}=$ пред. $(20\pi+\pi\triangle x)_{\triangle x=0}=20\pi$, а вообще, при всякомъ x,

она будетъ равна $2\pi x$, т. е. длинѣ соотвѣтствующей окружности.

Это можно подтвердить и графически.

Проведемъ окружность радіусомъ, равнымъ 10 ед., и затѣмъ, придавъ радіусу небольшое приращеніе $\triangle x$, опишемъ концентрическую окружность. Получившуюся кольцевую площадь, соотвѣтствующую $\triangle y$, представимъ себѣ разрѣзанной въ одномъ мѣстѣ поперекъ и развернутой въ видѣ узкой полоски, т. е. трапеціи.

Эта трапеція равновелика прямоугольнику той же высоты $\triangle x$, построенному на ея средней линіи.

Отношеніе $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ соотвѣтствуетъ длинѣ этой линіи, именно, $2\pi\left(10+\frac{\triangle x}{2}\right)$.

Очевидно, при безграничномъ уменьшеніи $\triangle x$, эта длина стремится къ длинѣ первоначальной окружности, $2\pi \cdot 10$, чтд.

Подобно этому, для функціи: $y=\frac{4}{3}\pi x^3$ производная выразится: пред. $\left(\frac{\triangle y}{\triangle x}\right)_{\triangle x=0}=4\pi x^2$, т. е., приростъ объема шара пропорціоналенъ его поверхности (напр., снѣжный комъ).

Слѣдуетъ замѣтить, что производная есть самостоятельная функція (а отнюдь *не величина безконечно малая*). Произведеніе этой функціи на безконечно малую $\triangle x$ становится ужъ безк. мал. и наз. **дифференціаломъ** функціи: $dy=y_x' \cdot dx$ . . . (4).

Не излишне указать, что дифференціалъ алгебраич. функціи есть величина однородная съ самой функціей, а производная—всегда низшаго измѣренія; напримѣръ, если функція выражаетъ объемъ, то и дифференціалъ ея есть безконечно малый объемъ, но производная отъ функціи есть уже площадь.

b) Если $y=f(x)$, то производная обозначается:

y_x' или y' . . . . по Лагранжу; $\frac{dy}{dx}$ . . . . по Лейбницу.

c) Если $y=f(u)$, гдѣ $u=F(x)$, то y наз. сложной функціей *отъ* x; тогда

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx},\ \text{т. е.,}\ y_x'=y_u'\cdot u_x'\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (5);$$

эта формула выражаетъ главное правило дифференцированія. (см. рѣш. № 288).

d) Для простыхъ функцій выведены формулы:

$$(const.)'=0\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (6).$$

$$(y+z-t+u-v)'=y'+z'-t'+u'-v'\ .\ .\ .\ (7).$$

$$(y\ .\ const.)'=y'\ .\ const.\ .\ .\ .\ .\ (8)$$

$(x^n)'=nx^{n-1}$ . . . (9), гдѣ n—цѣлое или дробное, положит. или отрицат.

такъ что: $(x)'=\frac{dx}{dx}=1;\left(\sqrt{x}\right)'=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ . . . (10).

$(a^x)'=a^x\ .\ lga$ . . . (11), гдѣ lg—Неперовъ логариѳмъ, такъ что $(e^x)'=e^x$ . . . . (12);

$(lgx)'=\frac{1}{x}$ . . . (13). Если же данъ логариѳмъ при другомъ основаніи, напр., $Log_m x$, но надо предварительно воспользоваться логариѳмич. модулемъ, такъ что $(Log_m x)'=$

$$=\left(lgx\ .\ \frac{1}{lgm}\right)'=\frac{1}{x\ .\ lgm}\ .\ .\quad (14).$$

$(snx)'=csx$ . . . . . (15); $(csx)'=-snx$. . . . . (16);

$(tgx)'=\frac{1}{cs^2x}=1+tg^2x$. . (17); $(ctgx)'=-\frac{1}{sn^2x}$ . . . (18);

$(arcsnx)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ . . . (19); $(arccsx)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. (20);

$(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2}$ . . . . (21); $(arcctgx)'=-\frac{1}{1+x^2}$ . . (22);

e) Если u и v суть функціи отъ x, то:

$(u\ .\ v)'=u'.v+u\ .\ v'$ . . (23); $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$ . . . (24);

$(u^v)'=v\ .\ u^{v-1}.\ u'+u^v\ .\ v'\ .\ lgu$ . . . . (25).

§ 4. Задачи на дифференцированіе несложныхъ функцій.

Найти производныя:

257. $y=\pi-x$.

258. $y=2x-3$.

259. $y=x^2+2ax+a^2$.

260. $y=\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}$.

*__261.__ $y=\frac{a^2}{x^3}$.

262. $y=\frac{a^2}{x^2}-\frac{2a}{mx}+\frac{1}{m^2}$.

*__263.__ $y=\frac{a}{4x^4}+\sqrt{x}$.

264. $y=3x^2-6x+7-\frac{1}{x}-2\sqrt{x}$.

*__265.__ $y=5x^2\sqrt{x}-\frac{3}{x^3}-\frac{1}{2}a\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}$.

266. $y=2\sqrt[4]{x^5}-3\sqrt[6]{x^5}+30\sqrt[5]{x^4}$.

*__267.__ $y=\sqrt[m]{x^p}$.

*__268.__ $y=x^3\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}$.

*__269.__ $y=e^{2x}+e^x$.

270. $y=a^x+\left(\frac{a}{2}\right)^x+\left(2a\right)^x$.

*__271.__ $y=10^x+100^x-1000^x$.

272. $y=x\sqrt{x}-27^{\frac{2}{3}x}$.

273. $y=\sqrt[3]{\pi x^2}-\frac{2}{3}lgx$.

274. $y=\frac{1}{2}lgax-\frac{1}{3}lg3x$.

275. $y=Log_{10}100x$.

*__276.__ $y=Log_{10}\frac{4}{3}\pi x^3$.

277. $y=\frac{3x^3}{\sqrt[3]{x^2}}-14\sqrt[7]{x}-\frac{15}{\sqrt[5]{x}}$.

278. $y=\frac{24}{11}x\sqrt[6]{x^5}-\frac{18}{17}x^2\sqrt[6]{x^5}+\frac{3}{10}x^3\sqrt[3]{x}$.

279. $y=3snx-2csx+tgx-ctgx.$

***280.** $y=snx\ .\ csa+csx\ .\ sna.$

281. $y=2tgx-\pi\sqrt{2x}+\pi^x+\pi lgx.$

282. $y=arcsnx-3x^3+2arctgx-\frac{1}{2}tgx.$

283. $y=x\ .\ sn\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\ .\ snx-\frac{1}{3}x^3+arcsnx.$

284. $y=\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\ .\ 2}+\frac{x^3}{1\ .\ 2\ .\ 3}+\frac{x^4}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4}+\ldots$ до ∞.

285. $y=arcsnx+arctgx-arccosx.$

286. $y=3\sqrt{z}-2lgz+e^z-5csz.$ Найти y'_z.

***287.** $y=lg\sqrt[3]{\frac{2}{3}\pi x^2}.$

§ 5. Дифференцированіе сложныхъ функцій.

288. $y=(ax^2+bx+c)^3.$ ***288а.** $y=lgsn(1+2\sqrt{x}).$

289. $y=(2a-3x)^6+(3a-2x)^{10}.$

290. $y=(2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x^2})^{-4}.$

291. $y=\sqrt{x^2+px+q}.$

292. $y=(\sqrt{ax}-\sqrt[3]{bx})^6+\frac{1}{x^2-a^2}.$

***293.** $y=\frac{1}{x+a}+\frac{2}{x+b}-\frac{3}{(x-c)^2}+\frac{4,5}{(\pi-x)^4}.$

294. $y=\sqrt{x^3-3snx+3^x}.$ ***295.** $y=\sqrt{(2ax-x^2)^5}.$

296. $y=sn(a+2x)-tg(2a-x^2)$

***297.** $y=lg(a-x)-\sqrt{a-x}.$

298 $y=sn\sqrt{x}+cs\sqrt[3]{x}-tglgx+ctge^x.$

299. $y=\sqrt[5]{(3x^2-5x^4)^3}$. ***300.** $y=\left(\frac{1}{3}tg^3x-tgx+x\right)^4$.

301. $y=e^{(a+x)^2}$. **302.** $y=a^{x^2+x+1}$.

***303.** $y=\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}+e^{\sqrt{x}}$

304. $y=e^x+e^{-x}+arctge^x$.

***305.** $y=sn^2x+cs2x-5tg(a-4x)$.

306. $y=\sqrt{1-x^4}-lg\sqrt{1-x^4}$. ***307.** $y=lg(x+\sqrt{1+x^2})$.

308. $y=x-2\sqrt{x}+2lg(1+\sqrt{x})$.

***309.** $y=secx-2csc^2x+e^{secx}$.

***310.** $y=sn\sqrt{\frac{1}{x}}+arcsn\sqrt{\frac{1}{x}}$.

311. $y=arcsn\sqrt{1-x^2}+lgarcsnx$.

312. $y=2lg(x-5)+\frac{3}{x-5}$.

***313** $y=lg(x^2+2x+10)-4arctg\frac{x+1}{3}$.

§ 6. Дифференцированіе произведенія и частнаго функцій.

***314.** $y=(x+2)^3(x-2)^2$. ***315.** $y=x\sqrt{a+x}$.

***316.** $y=\sqrt{a+x}\cdot\sqrt[3]{a^2-x^2}$. ***317.** $y=e^{-x}(x^3+3x^2+6x+6)$.

***318.** $y=snx\cdot sn(x-a)$. ***319** $y=\frac{1+x}{1-x}$.

***320.** $y=\frac{a+\sqrt{x}}{a-\sqrt{x}}$. ***321.** $y=\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}$.

322. $y=\frac{(a^2+x^2)^3}{(a^3+x^3)^2}$. ***323.** $y=\sqrt{\frac{a+bx}{a-bx}}$.

324. $y=\frac{x^2-2x+4}{x^2-1}$.

325. $y=\frac{3+2x+x^2}{3-2x+x^2}$.

326. $y=\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}$.

327. $y=\left(\frac{2}{3x^3}+\frac{28}{27x}\right)\sqrt{7x^2-9}$.

328. $y=\frac{e^x}{x}$.

329. $y=\frac{x}{lgx}$.

330. $y=\frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}$.

331. $y=\frac{e^x}{snx+csx}$.

332. $y=\frac{Log_{10}x}{e^x}$.

333. $y=arcsn\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

334. $y=arctg\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

335. $y=arccos\frac{b+acsx}{a+bcsx}$.

336. $y=\left(\frac{5}{cs^2x}+\frac{2}{cs^4x}\right)snx$.

*__337.__ $y=arctg\frac{a+x}{1-ax}$.

*__338.__ $y=arcsn(2x\sqrt{1-x^2})$.

*__339.__ $y=lg\frac{a+btgx}{a-btgx}$.

340. $y=csx\,.\,e^{snx}$.

341. $y=x\,.\,arctgx-\frac{1}{2}lg(1+x^2)$.

342. $y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

*__343.__ $y=\pi\frac{\sqrt{(x+1)(x+3)^9}}{(x+2)^4}$.

§ 7. Дифференцированіе болѣе сложныхъ функцій.

344. $y=sncstgx$.

*__345.__ $y=x^{snx}$.

346. $y=lglgx$.

347. $y=Log_{10}lgx$.

348. $y=Log_5Log_5x$.

*__349.__ $y=arccoslgsnx$.

*__350.__ $y=sn^2\frac{x}{2}\,.\,e^{-cs^3\frac{x}{3}}$.

*351. $y=\frac{2}{sn^2x\,cs\,x}-\frac{3cs\,x}{sn^2x}+3lg\,tg\,\frac{x}{2}$.

*352. $y=\frac{x\,.\,arcsn\,x}{\sqrt{1-x^2}}+lg\sqrt{1-x^2}$.

*353. $y=x^x$.

354. $y=x^{e^x}$.

355. $y=x^{x^x}$.

356. $y=\sqrt{1-x^2}-x\,.\,arcsn\sqrt{1-x^2}$.

357. $y=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)arccs\,x-\frac{1}{2}\,x\sqrt{1-x^2}$.

358. $y=15lg\,tg\,\frac{x}{2}+\frac{cs\,x}{sn^4x}(8cs^4x-25cs^2x+15)$.

359. $y=\sqrt[x]{x}$.

*360. $y=sn\,x\,.\,cs\,x\,.\,lg\,x$.

361. $y=sn\,x\,.\,arcsn\,x+tg\,x\,.\,arctg\,x$.

362. $y=\frac{5}{lg\sqrt{sn\,ax}}$.

*363. $y=lg^4sncs^2x^3$.

*364. $y=lgsn\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$.

*365. $y=lgarctg\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\frac{sn\,x-cs\,x}{tg\,x}\right)$.

*366. Посредствомъ производныхъ доказать тождество:

$$arctg\,x=arcsn\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

366а. То же для тождества:

$$arcsn\,x=arctg\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

367. То же для тождества:

$$arctg\,\frac{5x}{1-6x^2}=arctg\,2x+arctg\,3x.$$

367a. Отъ $f(x)=\frac{1}{(4-5x)^2}\cdot\left(x^3-\frac{96}{25}x+\frac{288}{25}\right)+\frac{12}{125}lg(4-5x)$ найти значеніе производной при $x=1$.

367b. Отъ $f(x)=\frac{1}{(1+x)^4}\left(\frac{1}{x}+\frac{125}{12}+\frac{65}{3}x+\frac{35}{2}x^2+5x^3\right)+$ $+5lg\frac{x}{1+x}$ найти производную при $x=-0{,}5$.

ГЛАВА III.

ВОЗРАСТАНІЕ И УБЫВАНІЕ ФУНКЦІЙ.

§ 8. Основныя правила и формулы.

а) Если $y=f(x)$, и x принимаетъ рядъ возрастающихъ значеній, то составивъ производную: $y'=f'(x)$ и подставивъ вмѣсто x нѣкоторое значеніе $x=c$, можемъ получить въ результатѣ:

1) либо $f'(c)>0$; 2) либо $f'(c)<0$; 3) $f'(c)=0$; 4) $f'(c)=\pm\infty$.

Въ первомъ случаѣ $f(x)$ есть функція возрастающая, во второмъ—убывающая (т. е. при $x>c$, $f(c+h)<f(c)$. Въ третьемъ и четвертомъ случаѣ *можетъ* (но не обязательно) наступить *поворотъ* значеній функціи: либо отъ возрастанія къ убыванію (*maximum*), либо отъ убыванія къ возрастанію (*minimum*).

Поэтому, если c есть одинъ изъ *корней* $f'(x)=0$, то смотрятъ на *знакъ* $f'(c-h)$ и $f'(c+h)$, гдѣ $h>0$, и $h=$ безк. мал. вел.

1) Если $f'(c-h)>0$ и $f'(c+h)<0$—то $f(c)$ maximum $f(x)$.

2) Если же $f'(c-h)<0$ и $f'(c+h)>0$—то $f(c)$ minimum $f(x)$.

Если, наконецъ, $\left.\begin{matrix}f'(c-h)\\f'(c+h)\end{matrix}\right\}<0$ или $\left.\begin{matrix}f'(c-h)\\f'(c+h)\end{matrix}\right\}<0$, то ни max., ни minim.

b) Если подстановка въ $f'(x)$ вмѣсто x, $c-h$ и $c+h$ приводитъ къ сложнымъ выкладкамъ, то можно судить о max. или min. *по знаку 2-ой производной*: $y''=f''(x)$: если $f''(c)<0$, то max.; если $f''(c)>0$—то min., если же $f''(c)=0$, то нужно найти $f'''(x)$ и т. д. (см. рѣш. № 389).

§ 9. Задачи на возрастаніе и убываніе функцій.

368. Выбрать возрастающія функціи изъ числа слѣдующихъ:

1) $y=tgx$; 2) $y=3^x$; 3) $y=(0{,}5)^x$; 4) $y=arctgx$; 5) $y=x^3$; 6) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$;

7) $y=arccosx$.

Найти max. и min. функцій:

369. $y=x^3-6x^2+9x+5$.

370. $y=x^3+6x^2-15x+10$.

371. $y=(x-1)^2(x+2)$.

372. $y=x^2+\frac{2}{x}$.

373. $y=sinx(1+cosx)$.

374. $y=x+\sqrt{a(a-x)}$.

*__375.__ $y=\frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$.

376. $y=x\,.\,arcsinx+\sqrt{1-x^2}$.

377. $y=x^3-12x^2+45x+30$.

378. $y=3x^4+16x^3+24x^2+5$.

379. $y=x^5-75x^3+1620x-1000$.

380. $y=x^2+\frac{2a^3}{x}$.

*__381.__ $y=\frac{1-x}{(1+x)^2}$.

382. $y=\frac{x^2}{e^x}$.

*__383.__ $y=\frac{x}{lgx}$.

*__384.__ $y=\frac{a^x}{x}$, при $a>1$.

385. $y=x(a^2-x^2)$.

*__386.__ $y=sinx\,.\,sin(a+x)$, при $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ и $0<a<\pi$.

387. $y=x^x$.

388. $y=sinx\,.\,cosx$.

*__388а.__ $y=acosx+bsinx$, при $a>0$ и $b>0$.

*__389.__ $y=e^x+2cosx+e^{-x}$.

*__390.__ $y=\frac{x}{x^2+4}$.

*__391.__ $y=(x-1)x^{2/3}$.

Доказать неравенства:

*392. $x > lg(1+x) > x - \frac{1}{2}x^2$, при $x > 0$.

393. $x > arctgx > x - \frac{1}{3}x^3$, при $x > 0$.

*394. $x < \frac{1}{3}tgx + \frac{2}{3}snx$, при $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

*395. $1 - \frac{1}{2}x^2 < csx < 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16}x^4$, при $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Опредѣлить *число* вещ. корней ур-ій:

*396. $2x^3+3x^2+6x+1=0$.

*397. $2x^3+3x^2-6x-7=0$.

*398. $x^3-3x+1=0$.

*399. $x^3-6x^2+9x+4=0$.

*400. $4x^3-3x^2-6x+1=0$.

*401. $3x^5-25x^3+60x+4=0$.

402. $x^2-2lgx=0$.

*403. Въ данный конусъ вписать цилиндръ наибольшаго объема.

*404. Въ данный шаръ вписать цилиндръ наибольшаго объема.

*405. Въ данный конусъ вписать цилиндръ съ наибольшей боковой поверхностью.

*406. Въ данный шаръ вписать конусъ съ наибольшей боковой поверхностью.

407. Въ данный шаръ вписать конусъ наибольшаго объема.

408. Въ данный шаръ вписать цилиндръ съ наибольшей *полной* поверхностью.

*409. Около даннаго шара описать конусъ наименьшаго объема.

*410. По данному объему найти цилиндръ съ наименьшей полной поверхностью.

411. По данной длинѣ образующей найти конусъ наибольшаго объема.

***412**. По данной гипотенузѣ найти прямоуг. $\triangle$ съ наибольшею площадью.

***413**. Въ данный квадратъ вписать квадратъ съ наименьшей площадью.

***414**. Двѣ желѣзныя дороги имѣютъ прямолинейные пути, скрещивающіеся подъ прямымъ угломъ въ пунктѣ C. По одному изъ нихъ, съ запада на востокъ, движется безостановочно поѣздъ со скоростью 30 верстъ въ часъ, вышедшій со станціи A, отстоящей на 100 верстъ къ западу отъ C, а по другому пути, съ сѣвера на югъ, поѣздъ со скоростью 40 в. въ часъ, вышедшій одновременно съ 1-мъ со станціи B, отстоящей на 50 в. къ сѣверу отъ C. Опредѣлить то мѣсто, гдѣ разстояніе между поѣздами будетъ кратчайшимъ.

415. Ту же задачу рѣшить въ общемъ видѣ, предполагая скорость 1-го $= V_1$, 2-го V_2, и разстояніе $AC = a$, $BC = b$.

***416**. Дана прямоугольная пластинка $ABCD$, длиной 24 сант., шириной 9 сант. Требуется вырѣзать изъ нея 4 угловыхъ квадрата такъ, чтобы, поднявъ затѣмъ края $\perp$ внутренней части, получить коробку наибольшей вмѣстимости.

417. Рѣшить ту же задачу въ общемъ видѣ, полагая длину $= a$, ширину $= b$.

***418**. Такъ наз. „нормандское“ окно имѣетъ форму прямоугольника, на верхней сторонѣ котораго построенъ полукругъ. Полагая периметръ окна постояннымъ и равнымъ $2p$, опредѣлить размѣры его такъ, чтобы оконный просвѣтъ былъ наибольшимъ.

ГЛАВА IV.

НЕОПРЕДѢЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

§ 10. Основныя формулы интегрированія.

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ гдѣ } n \neq -1 \quad \ldots\ldots\ldots (26)$$

$$\int \frac{dx}{x} = lgx + C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

$$\int e^x dx = e^x + C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (28)$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{lga} + C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (29)$$

$$\int csxdx = snx + C. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (30)$$

$$\int snxdx = -csx + C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (31)$$

$$\int \frac{dx}{cs^2x} = tgx + C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (32)$$

$$\int \frac{dx}{sn^2x} = -ctgx + C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (33)$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (34)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsnx + C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (35)$$

§ 11. Важнѣйшіе пріемы и правила интегрированія.

Если данный $\int f(x)dx$ не подходитъ непосредственно ни подъ одинъ изъ видовъ основныхъ формулъ, то предварительно нужно сдѣлать слѣдующія преобразованія:

а) Постоянный множитель выносится за знакъ $\int$, т. е., $\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx$ . . . . . (36).

b) Интегралъ суммы равенъ суммѣ $\int$'овъ:

$$\int(u+v-w)dx=\int udx+\int vdx-\int wdx \quad . \quad . \quad . \quad (37).$$

c) Способъ подстановки состоитъ въ томъ, что, выбравъ наиболѣе подходящую функцію, обозначаютъ ее черезъ новую нез. перем. z. Выборъ зависитъ отъ навыка; нерѣдко въ подынтегральной функціи весь знаменатель удобно положить $= z$.

d) Способъ интегрированія *по частямъ* основанъ на формулѣ: $\int u \,.\, dv = u \,.\, dv - \int v \,.\, du \quad . \quad . \quad . \quad .$ (38), гдѣ u и v суть функціи отъ x (см. рѣш. № 473).

e) Для раціональныхъ дробей примѣняется иногда разложеніе ихъ на простѣйшія (см. рѣш. № 491).

§ 12. Задачи на простѣйшіе неопред. интегралы (безъ примѣненія формулы (38)).

***419.** $\int \sqrt[5]{x^3}\,dx.$ ***420.** $\int \frac{dx}{x^4}.$

***421.** $\int \frac{dx}{\sqrt[10]{x^3}}.$ **422.** $\int 5^x dx.$

423. $\int cs2x dx.$ **424.** $\int 3snx dx.$

425. $\int sn3x dx.$ ***426.** $\int \frac{dx}{1+4x^2}.$

***427.** $\int \frac{dx}{4+x^2}.$ **428.** $\int \frac{dx}{sn^2 3x}.$

***429.** $\int tgx dx.$ **430.** $\int ctgx dx.$

431. $\int cs(2x+a)dx.$ **432.** $\int (a^2+ax+x^2)dx.$

433. $\int \left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)dx.$ **434.** $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx.$

435. $\int\left(\sqrt{x}-\frac{2}{3}\sqrt[3]{x^2}\right)^3 dx$. **436.** $\int\frac{dx}{1+(x-2)^2}$.

437. $\int\frac{2xdx}{1+x^4}$. **438.** $\int\frac{dx}{a^2+x^2}$.

439. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$. **440.** $\int\frac{3dx}{\sqrt{\pi^2-\pi^2x^2}}$.

441. $\int\frac{3+5\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^3}}dx$. **442.** $\int\frac{dx}{e^x}$.

443. $\int(e^{2x}-1)^2dx$. **444.** $\int(e^x+e^{-x})^2dx$.

445. $\int(ax+b)^n dx$. ***446.** $\int e^{snx}csxdx$.

447. $\int cs5xdx$. ***448.** $\int cs(a-3x)dx$.

449. $\int sec^2(x-a)dx$. ***450.** $\int tg10xdx$.

***451.** $\int\frac{tg^3xdx}{cs^2x}$. **452.** $\int\frac{\sqrt{ctgx}.dx}{sn^2x}$.

***453.** $\int\frac{x^{m-1}dx}{1+x^m}$. ***454.** $\int\frac{dx}{\sqrt{a+x}}$.

455. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{2-3x}}$. **456.** $\int\frac{csxdx}{a+bsnx}$.

457. $\int\frac{e^xdx}{\sqrt{e^x-a}}$. **458.** $\int\frac{dx}{(1+x^2)arctgx}$.

459. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}arcsnx}$. **460.** $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt[3]{arcsnx}}$.

***461.** $\int sn^2xdx$. **462.** $\int cs^2xdx$.

***463.** $\int tg^2xdx$. **464.** $\int ctg^2xdx$.

***465.** $\int\frac{dx}{snxcsx}$. **466.** $\int\frac{dx}{sn2x}$.

*467. $\int \frac{dx}{snx}$.

468. $\int cscxdx$.

*469. $\int \frac{dx}{csx}$.

470. $\int secxdx$.

471. $\int \frac{dx}{1+csx}$.

472. $\int (e^{3x}+\sqrt{e^x})dx$.

§ 13. Неопредѣленные $\int$'ы (съ $\int$-ніемъ по частямъ).

*473. $\int lgxdx$.

*474. $\int xcsxdx$.

*475. $\int sn^2xdx$.

476. $\int x^3lgxdx$.

*477. $\int arctgxdx$.

478. $\int arcsnxdx$.

*479. $\int xarctgxdx$.

*480. $\int xlg^2xdx$.

*481. $\int e^{2x}csxdx$.

*482. $\int sn^3xdx$.

*483. $\int \frac{xdx}{sn^2x}$.

*484. $\int x \cdot e^x dx$.

485. $\int e^x cs2xdx$.

486a. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.

486. $\int x \cdot sn2xdx$.

*487. $\int \frac{dx}{sn^2xcs^2x}$.

488. $\int x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx$.

489. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-lg^2x}}$.

490. $\int \frac{xdx}{a^2-x^2}$.

*491. $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$.

492. $\int \frac{dx}{a^2-x^2}$.

*493. $\int (x^3-1)e^x dx$.

494. $\int tg^3xdx$.

495. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-1}}$.

496. $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$.

497. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$.

498. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

*__499.__ $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

500. $\int \frac{dx}{1+e^x}$.

*__501.__ $\int \sqrt{1-x^2}dx$.

*__502.__ $\int \frac{xe^x dx}{(1+x)^2}$.

503. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

*__504.__ $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

505. $\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx$.

*__506.__ $\int \frac{dx}{x^2-8x+15}$.

*__506a.__ $\int \frac{dx}{x^2+8x+20}$.

*__507.__ $\int \frac{dx}{x^2+6x+8}$

507a. $\int \frac{dx}{x^2-6x+25}$.

508. $\int \frac{dx}{1+snx}$.

509. $\int \frac{dx}{1-x^2}$.

509a. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

*__510.__ $\int \frac{4x^3-7x+2}{2x+1} dx$.

511. $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$.

*__512.__ $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$.

513. $\int \frac{e^x-1}{e^x+1} dx$.

*__514.__ $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^4-x^4}}$.

*__514a.__ $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

514b. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

ГЛАВА V.

ОПРЕДѢЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

§ 14. Общія понятія и формулы.

а) Понятіе о суммѣ не нуждается въ опредѣленіи.

Нахожденіе суммы достигается посредствомъ одного изъ 3-хъ дѣйствій: *сложенія*—по правиламъ ариѳметики и элементарной алгебры, *суммированія*—для прогрессій и вообще рядовъ—по готовымъ формуламъ, и, наконецъ, *интегрированія*.

Въ первомъ изъ нихъ число слагаемыхъ конечно; при суммированіи—число слагаемыхъ можетъ быть и безконечно большимъ; интегрированіе же есть нахожденіе предѣла суммы безчисленнаго множества безконечно малыхъ слагаемыхъ.

Если вообразимъ три одинаковыхъ диска (цилиндра), высотой въ 1 сантиметръ, вырѣзанныхъ изъ ствола березы, и одинъ изъ нихъ разрѣжемъ какъ-нибудь на нѣсколько кусковъ, второй разрѣжемъ пополамъ, одну изъ половинъ еще пополамъ, одну изъ четвертей еще разъ пополамъ и т. д., то нахожденіе суммы по даннымъ частямъ 1-го диска соотвѣтствуетъ сложенію, а для 2-го—суммированію геом. прогрессіи. Третій же дискъ будемъ разсматривать, какъ состоящій изъ частей, соотвѣтствующихъ его *постепенному наростанію* отъ радіуса близкаго къ нулю, до даннаго радіуса $= r$. Если непрерывно измѣняющійся его радіусъ обозначимъ черезъ x, то объемъ цилиндра: $y = \pi x^2 \cdot 1$, и какъ указано было въ § 3, $dy = 2\pi x \cdot dx$ покажетъ безконечно малое приращеніе объема (соотвѣтственно безконечно тонкому кольцевому слою луба). Очевидно, весь объемъ цилиндра есть сумма безчисленнаго множества такихъ тончайшихъ „элементарныхъ объемовъ“, причемъ x измѣняется отъ нуля до r. Эта сумма и называется опредѣленнымъ интеграломъ, такъ что $y = \int_0^r 2\pi x dx = \pi r^2$, какъ и въ 1-мъ и 2-мъ случаяхъ. Конечно, гдѣ возможно, проще находить сумму посредствомъ

обыкновеннаго сложенія, или путемъ суммированія, но бываютъ случаи, когда оба первые пріема не пригодны; именно, это бываетъ тогда, когда, наблюдая измѣненія какой-нибудь величины, мы устанавливаемъ связь между ея безконечно малымъ приращеніемъ и нѣкоторыми извѣстными величинами; это имѣетъ мѣсто въ астрономіи, напр., при наблюденіи элементовъ движенія новой кометы; опредѣливъ дифференціалъ дуги или же сектора, путемъ интегрированія можно найти и всю ея орбиту. Въ такихъ наукахъ, какъ физика, термодинамика, строительная механика, электротехника и т. п., ученый, изучая явленія и опыты, составляетъ ур-ія между дифференціалами разныхъ функцій, а по нимъ находитъ путемъ интегрированія и самыя функціи; формулированные результаты наз. законами и служатъ исходнымъ матеріаломъ для практическихъ расчетовъ.

b) Если отыскивается площадь, ограниченная осью абсциссъ, двумя ординатами, соотвѣтствующими x_1 и x_2, и кривой, заданной ур-іемъ: $y=f(x)$, то дифференціалъ этой площади $dQ=ydx$, а вся площадь $Q=\int_{x_1}^{x_2} ydx$ . . . (39).

c) Чтобъ вычислить опредѣленный $\int$, надо раньше найти соотвѣтствующій неопредѣленный (безъ C), взять его значеніе при $x=$ верхнему предѣлу, и вычесть изъ этого его-же значеніе при $x=$ нижнему предѣлу.

Напр. $\int_r^k 2\pi x dx = \Big|_r^k \pi x^2 = \pi k^2 - \pi r^2$. . . . . (40).

§ 15. Задачи на опредѣленные интегралы.

*515. $\int_1^e \frac{dx}{x}$.

*516. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{cs5xdx}{5+2sn5x}$.

*517. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sn3xdx}{4+3cs3x}$.

*518. $\int_1^2 \left(2x^2 + \frac{1}{3x^2} - 5\sqrt[3]{x+3} + \frac{3}{\sqrt[5]{x^3}}\right) dx$.

*519. $\int_{\sqrt{3}}^{1} \frac{dx}{(1+x^2)arctgx}$.

520. $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\cdot arcsnx}$.

521. $\int_{0}^{1} xe^x dx$.

*522. $\int_{1}^{e} \frac{lg^2 x dx}{x}$.

523. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$.

524. $\int_{0}^{1} a^{mx} dx$.

525. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sn^2\varphi d\varphi$.

526. $\int_{0}^{a} \frac{dx}{x^2+a^2}$.

527. $\int_{2}^{7} \sqrt{x+2}\, dx$.

*528. $\int_{0}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.

529. $\int_{0}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

530. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} tgxdx$.

531. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+csx}$.

532. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{snx} csxdx$.

533. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{snx}$.

*534. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^2 csxdx$.

535. $\int_{0}^{1} e^{-x} dx$.

356. $\int_{\frac{1}{2}}^{1} arcsnxdx$.

537. $\int_{1}^{e} x^3 lgxdx$.

538. $\int_{0}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\, dx$.

539. $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x^2}$.

540. $\int_{0}^{1} \frac{xe^x dx}{(1+x)^2}$.

*541. $\int_{1}^{3} arctg\sqrt{x}\, dx$.

*542. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} cs^5 xdx$.

543. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$. **544.** $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

***545.** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{cs^4 x}$. **546.** $\int_{-1}^{0} \frac{xe^{-x}dx}{(1-x)^2}$.

ГЛАВА VI.

Смѣшанныя задачи на всѣ отдѣлы.

***547.** Найти ур-ія касательной и нормали къ эллипсу:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

въ точкѣ 1-ой четверти, абсцисса которой равна

$$\int_0^2 (4x^3-3x^2+1)dx,$$

если большая полуось равна значенію производной отъ функціи: $f(x)=\frac{744}{\sqrt{3}} arctg \frac{x\sqrt{3}}{x+2}$ при $x=5$, а меньшая полуось равна минимуму $F(x)=\frac{1}{8}(x^3-12x^2+45x+30)$.
(Спб. 3-ье Р. У. экз. 1908 г.).

548. Большая полуось эллипса $a=\int_0^5 \frac{160dx}{\pi x^2+25\pi}$, малая

$$b=max\ .\ f(x)=\frac{36x}{x^2+2x+4}.$$

Найти ур-ія касательной и нормали въ точкѣ 1-ой четв., абсцисса которой равна значенію производной отъ

$$F(x)=3lg(x^2-4)+\frac{7}{4}lg\frac{x-2}{x+2} \text{ при } x=3.$$

(Спб. 3-ье Р. У. экз. 1909 г.).

549. Найти ур-ія касательной и нормали къ гиперболѣ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ въ точкѣ 3-й четверти, ордината которой равна отношенію функціи:

$$f(x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{8}+\ldots \text{ до } \infty$$

къ своей же производной, при $x=4$. Вещ. полуось гиперболы

$$a=\int_1^4 m^3\left(\frac{4}{\sqrt{x}}-5x\sqrt{x}\right)dx,$$

гдѣ m равно угловому коэфф. прямой, соединяющей точки: (3, 0) и (6, —1); мнимая равна разности между maxim. и minim.

$$F(x)=sn2x+cs2x.$$

550. Найти ур-ія касательной и нормали, а также длину подкасательной къ гиперболѣ: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ въ точкѣ ея 4-ой четверти съ ординатой, равной наименьшему значенію производной отъ $f(x)=sn^4x+cs^4x$, если числовой эксцентриситетъ гиперболы

$c=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{15dx}{\pi\sqrt{\pi^2-x^2}}$, а мнимая полуось b равна минимуму

$$F(x)=\frac{8}{x^2}+\frac{1}{(1-x)^2}-24.$$

551. Найти точку пересѣченія двухъ касательныхъ, проведенныхъ къ параболѣ: $y^2=2px$, гдѣ $p=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3cs^3xdx$, въ точкахъ съ ординатами: $y_1=max.\ f(x)=x\sqrt{2-x^2}$, и y_2, равной значенію производной отъ

$$F(x)=arctg\sqrt{\frac{1-csx}{1+csx}}-8arctg\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x},\ \text{при } x=1.$$

552. Найти ур-іе нормали и длину субнормали, проведенной къ параболѣ: $y^2=2px$ въ точкѣ ея съ ординатой, равной утроенной *суммѣ* наибольшаго и наименьшаго значенія *производной* отъ $f(x)=\frac{1}{12}(5+4x^3-3x^4)+\frac{7}{27}x$, зная, что

$$p=\int_{-4}^{5}\frac{7}{24}x\sqrt[3]{x-4}\,dx.$$

553. Фокусъ параболы: $y^2=2px$ лежитъ на окружности: $x^2+y^2=r^2$. Найти ур-ія касательныхъ, проведенныхъ къ обѣимъ кривымъ въ точкѣ ихъ пересѣченія въ 1-ой четверти, зная, что $r=\text{maxim. } f(x)=e^{2a}\cdot x\sqrt{\frac{x-x^2}{3}}$, гдѣ $a=$

$$=\int_{1}^{9}\frac{dx}{x+\sqrt{x}}.$$

***554**. Астрономическій эксцентриситетъ эллипса равенъ $\text{min. } f(x)=x-\sqrt{1-x}+\frac{1}{12}$, а меньшая полуось $b=$

$$=\int_{0}^{1}\frac{3x^2\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$ Найти ур-іе нормали къ эллипсу, проведенной черезъ точку его въ 3-ей четверти, имѣющую абсциссу, равную производной отъ $F(x)=arctg\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\frac{1}{2\pi}$

при $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

***555**. Двѣ стороны $\triangle$-ка имѣютъ ур-ія: $Ax+By+C=0$ и $Bx+y+A=0$. Точка пересѣченія высотъ находится въ началѣ коорд. Найти ур-іе 3-ьей стороны, зная, что A равно значенію производной отъ $f(x)=\frac{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}{x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}$ при $x=-1$; B равно минимуму $F(x)=\frac{12x(2x-1)}{4x^2-2x+1}$, и отношеніе

$$\frac{C}{A\,.\,B}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^x dx}{(e^x-1)^2}.$$

РѢШЕНІЯ и ОТВѢТЫ.

231. Разложивъ на множителей числителя и знаменателя и сокративъ общаго, находамъ пред. $y=1$.

232. Аналогично находимъ пред. $y=\frac{-2}{\pi}$

233. Умножая на сопряженную съ числит. величину, переводимъ ирраціон. въ знам. и по сокращеніи находимъ пред. $y=\frac{1}{\sqrt{a}}$.

234. Аналогично предыд. и пользуясь формулой (2), находимъ пред. $y=\frac{1}{2}$.

235. Въ виду безконечнаго числа корней, можно написать: пред. $y=\sqrt{x^2+x+\text{пред. } y}$, откуда пред. $y=\frac{1+(2x+1)}{2}=x+1$.

236. Аналогично: пред. $y=x$.

237. Раскрывъ скобки и выполнивъ дѣленіе, находимъ: пред. $y=12$.

238. Выполнивъ дѣленіе, находимъ пред. $y=$

$$=\text{пред.}\left(\frac{1}{x}+\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2+4}\right)_{x=\infty}=2.$$

239. Чтобъ свести къ формулѣ (1), обозначаемъ: $-\frac{2}{n}=\frac{1}{m}$; тогда $n=-2m$, и при $n=\infty$, $m=-\infty$; слѣд., пред. $y=$

$$=\text{пред.}\left(1+\frac{1}{m}\right)_{m=-\infty}^{-6m}=\left[\text{пред.}\left(1+\frac{1}{m}\right)_{m=-\infty}^{m}\right]^{-6}=e^{-6}.$$

240. Аналогично: $\frac{2}{3}n=\frac{1}{m}$; $n=\frac{3}{2m}$; пред. $y=$

$=$ пред.$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\frac{8m}{15}}_{m=\infty}=e^{\frac{8}{15}}$.

241. Такъ какъ $x=1+(x-1)$, то обозначаемъ: $x-1=\frac{1}{m}$;

при $x=1$, $m=\infty$, слѣд., пред. $y=$пред. $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}_{m=\infty}=e$.

242. Сводимъ къ формулѣ (2): пред. $y=$пред. $\frac{2sn^2\frac{x}{2}}{x^2}=$

$=2$. пред.$\left(\frac{sn\frac{x}{2}}{x/_2}\right)^2$. $\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

243. $\alpha=\frac{1}{m}$; при $\alpha=0$, $m=\infty$, слѣд., пред. $y=$

$=$пред.$\left[m\,lg\left(1+\frac{1}{m}\right)_{m=\infty}\right]=$пред.$\left[lg\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}_{m=\infty}\right]=$

$=lg\left[\text{пред.}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}_{m=\infty}\right]=lge=1.$

244. Аналогично предыд. находимъ: пред. $y=\frac{5}{3}$.

245. Сводимъ къ формулѣ (2), полагая $\frac{\pi}{x}=\alpha$.

пред. $y=$пред.$\left(\pi\ .\ \frac{sn\alpha}{\alpha}\right)_{\alpha=0}=\pi$.

246. Полагая $\frac{\pi}{4}-x=\alpha$, преобразуемъ:

пред. $y=$пред.$\left(ctg2\alpha\ .\ tg\alpha\right)_{\alpha=0}=$пред.$\left(\frac{cs2\alpha\ .\ sn\alpha}{2sn\alpha cs\alpha\ .\ cs\alpha}\right)_{\alpha=0}=\frac{1}{2}$.

247. Подобно № 239, находимъ пред. $y=e^{-12}$.

248. Раздѣливъ числителя на знаменателя, рѣшаемъ подобно № 239: $-\frac{5}{3m+1}=\frac{1}{n}$; пред. $y=$ пред. $\left(1+\frac{1}{n}\right)_{n=-\infty}^{\frac{-7-5n}{3}}=$

$$=\left[\text{пред.}\left(1+\frac{1}{n}\right)_{n=-\infty}^{-\frac{7}{3}}\right]\cdot\left[\text{пред.}\left(1+\frac{1}{n}\right)_{n=-\infty}^{n}\right]^{-\frac{5}{3}}=1\cdot e^{-\frac{5}{3}}=e^{-\frac{5}{3}}.$$

249. Суммируя по формулѣ прогрессіи и выполняя дѣленіе, находимъ: пред. $y=$пред. $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)_{n=\infty}=\frac{1}{2}$.

250. Аналогично № 239, находимъ: пред. $y=e^{-2}$.

251. Прилагая къ числителю обобщенную формулу бинома Ньютона и выполняя дѣленіе, находимъ пред. $y=n$.

Другой способъ: Обозначая безк. малую: $(1+\alpha)^m-1=\beta$, умножаемъ члены дроби на $lg(1+\beta)=nlg(1+\alpha)$, такъ что: пред. $y=$ пред. $\left[\frac{\beta}{lg(1+\beta)}\cdot n\cdot\frac{lg(1+\alpha)}{\alpha}\right]_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0}}$; ссылаясь на рѣш. № 243, находимъ: пред. $y=n$.

252. $lgx=lgx-1$; рѣшая подобно № 239, преобразуемъ:

$$\text{пред. } y=\text{ пред. }\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-6n}\right]_{n=-\infty}=e^{-6}.$$

252а. Подобно № 250, пред. $y=e$.

253. Суммированіе безконечныхъ рядовъ возможно только въ нѣкоторыхъ случаяхъ и основано большей частью на искусственныхъ пріемахъ; въ данномъ случаѣ замѣчаемъ:

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},\text{ такъ что}$$

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+$$

$$+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}\text{ и пред. }S_n=1.$$

254. Аналогично: $\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$, слѣд.

$$S_n=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}=$$

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right);\ \text{пред. } S_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{4}.$$

255. На основаніи формулы (2) замѣняемъ безк. малыя слагаемыя имъ *эквивалентными**) дугами, и суммируемъ полученную ариѳм. прогрессію; тогда пред. $S_n=$

$$=\text{пред.}\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)_{n=\infty}=\frac{\pi}{2}.$$

256. Предварительнымъ логариѳмированіемъ сводимъ задачу къ суммированію ряда; каждое изъ безк. малыхъ слагаемыхъ его замѣняемъ эквивалентнымъ на основаніи формулы (3), такъ что

$$lgP_n=tg\frac{\pi x}{n^2}+tg\frac{2\pi x}{n^2}+\ldots\ldots+tg\frac{(n-1)\pi x}{n^2}.$$

Здѣсь опять замѣняемъ $tg\alpha$ эквивалентной величиной α (слѣдствіе формулы (2)), и по формулѣ ариѳм. прогрессіи находимъ: $lgP_n=\frac{\pi x}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$. Тогда

$$\text{пред. } lgP_n=lg(\text{пред. } P_n)_{n=\infty}=\frac{\pi x}{2};\ \text{пред. } P_n=\sqrt{e^{\pi x}}.$$

257. $y'=-1$. **258**. $y'=2$.

259. $y'=2x+2a$.

260. $y'=\frac{1}{2}\cdot 2x-\frac{1}{3}\cdot 3x^2+\frac{1}{4}\cdot 4x^3=x-x^2+x^3$.

261. $y=a^2x^{-3}$; $y'=a^2\cdot(-3x^{-4})=-\frac{3a^2}{x^4}$.

---

*) *Эквивалентными* наз. такія безкон. малыя, предѣлъ отношенія которыхъ равенъ 1.

262. $y' = \frac{-2a^2}{x^3} + \frac{2a}{mx^2}$.

263. $y = \frac{a}{4} \cdot x^{-4} + x^{\frac{1}{2}}$; $y' = \frac{a}{4} \cdot \left(-4x^{-5}\right) + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} =$

$= \frac{-a}{x^5} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

264. $y' = 6x - 6 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

265. $y = 5x^{\frac{5}{2}} - 3x^{-3} - \frac{1}{2}ax^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{2}{3}}$; $y' = \frac{25}{2}x^{\frac{3}{2}} + 9x^{-4} - \frac{1}{4}ax^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$.

266. $y = 2x^{\frac{5}{4}} - 3x^{\frac{5}{6}} + 30x^{\frac{4}{5}}$; $y' = \frac{5}{2}x^{\frac{1}{4}} - \frac{5}{2}x^{-\frac{1}{6}} + 24x^{-\frac{1}{5}}$.

267. $y = x^{\frac{p}{m}}$; $y' = \frac{p}{m}x^{\frac{p}{m}-1} = \frac{p}{m}\sqrt[m]{x^{p-m}}$.

268. $y = x^{\frac{23}{6}}$; $y' = \frac{23}{6}x^{\frac{17}{6}} = \frac{23}{6}\sqrt[6]{x^{17}}$.

269. $y = (e^2)^x + e^x$; $y' = e^{2x} \cdot lge^2 + e^x = 2e^{2x} + e^x$ (по формулѣ (11)).

270. $y' = a^x lga + \left(\frac{a}{2}\right)^x lg\frac{a}{2} + (2a)^x lg2a$.

271. $y' = 10^x lg10(1 + 2.10^x - 3.10^{2x})$.

272. $y = x^{\frac{3}{2}} - \left(\sqrt[3]{27^2}\right)^x = x^{\frac{3}{2}} - 9^x$; $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 9^x lg9$.

273. $y = \sqrt[3]{\pi} \cdot x^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}lgx$; $y' = \sqrt[3]{\pi} \cdot \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x} =$

$= \frac{2}{3x}\left(\sqrt[3]{\pi x^2} - 1\right)$.

274. $y = \frac{1}{2}lga + \frac{1}{2}lgx - \frac{1}{3}lg3 - \frac{1}{3}lgx$; $y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{6x}$.

275. $y = 2 + Log_{10}x$; $y' = \frac{1}{xlg10}$.

276. $y = Log_{10}\frac{1}{3}\pi + 3Log_{10}x$; $y' = 3 \cdot \frac{1}{xlg10}$.

277. $y = 3x^{\frac{7}{3}} - 14x^{\frac{1}{7}} - 15x^{-\frac{1}{5}}$; $y' = x^{\frac{4}{3}} - 2x^{-\frac{6}{7}} + 3x^{-\frac{6}{5}}$.

278. $y'=4x^{\frac{5}{6}}-3x^{\frac{11}{6}}+x^{\frac{7}{3}}$.

279. $y'=3csx+2snx+\frac{1}{cs^2x}+\frac{1}{sn^2x}$.

280. $y'=csa\,.\,csx+sna\,.\,(-snx)=cs(x+a)$.

281. $y'=\frac{2}{cs^2x}-\pi\sqrt{2}\,.\,\frac{1}{2\sqrt{x}}+\pi^x lg\pi+\pi\,.\,\frac{1}{x}$. Упрощеніе безполезно въ виду отсутствія подобныхъ членовъ.

282. $y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-9x^2+\frac{2}{1+x^2}-\frac{1}{2cs^2x}$.

283. $y'=sn\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}csx-x^2+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

284. $y'=1+\frac{2x}{1\,.\,2}+\frac{3x^2}{1\,.\,2\,.\,3}+\frac{4x^3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}+\ldots.=1+y$.

285. $y'=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{1+x^2}$, такъ какъ $arccosx=\frac{\pi}{2}-arcsnx$.

286. $y'_z=\frac{3}{2\sqrt{z}}-\frac{2}{z}+e^z+5snz$. Здѣсь z—нез. перем.

287. $y=\frac{1}{3}lg^2_3\pi+\frac{2}{3}lgx$; $y'=0+\frac{2}{3}\,.\,\frac{1}{x}=\frac{2}{3x}$.

288. Если приходится пользоваться формулой (5), то слѣдуетъ имѣть въ виду постепенность подчиненности функцій; напр. $y=lgsn(1+2\sqrt{x})$ . . . . (1).

Здѣсь y есть lg отъ нѣкоторой $f(x)$, которая представляетъ собою синусъ дуги, причемъ дуга эта, въ свою очередь, есть непосредственно функція отъ x, именно, степенная (корень кв.).

Въ такомъ порядкѣ и слѣдуетъ примѣнять формулу (5): сперва разсматривать: $y=lgu$; $y'=\frac{1}{u}\,.\,u'$ . . . . . (2); потомъ:

$u = snv$; $u' = csv \cdot v'$ . . . . (3); и наконецъ: $v = 1 + 2\sqrt{x}$; $v' = \frac{2}{2\sqrt{x}}$ . . . . (4); и подставить (4) въ (3) и (3) во (2).

При нѣкоторомъ навыкѣ можно обозначеній u, v, . . . не вводить, а сразу вписывать ихъ значенія, беря производныя функцій въ порядкѣ *слѣва направо*, и перемножая, причемъ все, что стоитъ вправо отъ обозначенія самой функціи, считается какъ-бы одной неразрывной группой; такъ, напр., сразу пишемъ:

$$y' = \frac{1}{sn(1+2\sqrt{x})} \cdot cs(1+2\sqrt{x}) \cdot \frac{2}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot ctg(1+2\sqrt{x}).$$

Вообще слѣдуетъ запомнить, что порядокъ дифференцированія обратенъ порядку вычисленія значенія функціи (напр., для (1), при заданномъ x, сперва вычислили бы v, затѣмъ snv, а потомъ только $lgsnv$, а при составленіи производной—совершенно наоборотъ).

Въ данномъ случаѣ, пропуская обозначенія u, v, пишемъ:

$$y' = 3(ax^2+bx+c)^2 \cdot (ax^2+bx+c)'_x = 3(ax^2+bx+c)(2ax+b).$$

288а. См. рѣш. № 288.

289. $y' = 6(2a-3x)^5 \cdot (-3) + 10(3a-2x)^3 \cdot (-2)$.

290. $y' = -4\left(2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x^2}\right)^{-5} \cdot \left(\frac{2}{2\sqrt{x}} - 3 \cdot \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)$.

291. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+px+q}} \cdot (2x+p)$.

292. $y = (\sqrt{ax} - \sqrt[3]{bx})^6 + (x^2-a^2)^{-1}$; $y' = 6(\sqrt{ax} - \sqrt[3]{bx})^5 \cdot \left(\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt[3]{b}}{3\sqrt[3]{x^2}}\right) + (x^2-a^2)^{-2} \cdot 2x =$

$$= (\sqrt{ax} - \sqrt[3]{bx})^5 \left(3\sqrt{\frac{a}{x}} - 2\sqrt[3]{\frac{b}{x^2}}\right) - \frac{2x}{(x^2-a^2)^2}.$$

293. $y' = -(x+a)^{-2} \cdot 1 + 2(-1) \cdot (x+b)^{-2} \cdot 1 -$

$-3 \cdot (-2)(x-c)^{-3} \cdot 1 + 4{,}5 \cdot (-4)(\pi-x)^{-5} \cdot (-1) =$

$$= -\frac{1}{(x+a)^2} - \frac{2}{(x+b)^2} + \frac{6}{(x-c)^3} + \frac{18}{(\pi-x)^5}.$$

294. $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x^3 - 3\sin x + 3^x}} \cdot (x^2 - 3\cos x + 3^x \lg 3).$

295. $y' = \frac{5}{2}(2ax-x^2)^{3/2} \cdot (2a-2x) = 5(a-x)\sqrt{(2ax-x^2)^3}.$

296. $y' = \cos(a+2x) \cdot 2 - \dfrac{1}{\cos^2(2a-x^2)} \cdot (-2x).$

297. $y' = \dfrac{1}{a-x} \cdot (-1) - \dfrac{1}{2\sqrt{a-x}} \cdot (-1) = \dfrac{\sqrt{a-x}-2}{2(a-x)}.$

298. $y' = \cos\sqrt{x} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \sin\sqrt[3]{x} \cdot \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{1}{\cos^2 \lg x} \cdot$

$\cdot \dfrac{1}{x} + \dfrac{-1}{\sin^2 e^x} \cdot e^x.$

299. $y' = \frac{3}{5}(3x^2 - 5x^4)^{-\frac{2}{5}} \cdot (6x - 20x^3).$

300. $y' = 4(\frac{1}{3}\lg^3 x - \operatorname{tg} x + x)^3 \cdot (\operatorname{tg}^2 x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{\cos^2 x} + 1) =$

$= (\text{замѣняя: } \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x) = 4(\frac{1}{3}\lg^3 x - \operatorname{tg} x + x)^3 \cdot \operatorname{tg}^4 x.$

301. $y' = e^{(a+x)^2} \cdot 2(a+x) \cdot 1.$ **302.** $y' = a^{x^2+x+1} \cdot \lg a \cdot (2x+1).$

303. $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{a + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x^2}}} \cdot [b \cdot (-1)x^{-2} + c \cdot (-2)x^{-3}] +$

$+ e^{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{-x}{2\sqrt{ax^2+bx+c}} \cdot \left(\dfrac{b}{x^2} + \dfrac{2c}{x^3}\right) + \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \cdot$

304. $y' = e^x + e^{-x} \cdot (-1) + \dfrac{1}{1+e^{2x}} \cdot e^x = \dfrac{e^{4x}+e^{2x}-1}{e^{3x}+e^x}.$

305. $y' = 2snx.csx - cs2x.2 - 5 \cdot \frac{1}{cs^2(a-4x)} \cdot (-4) =$

$= sn2x - 2cs2x + \frac{20}{cs^2(a-4x)}$.

306. $y' = \frac{1}{2\sqrt{1-x^4}} \cdot (-4x^3) - \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^4}} \cdot (-4x^3) =$

$= \frac{2x^3}{1-x^4}\ (1 - \sqrt{1-x^4})$.

307. $y' = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

308. $y' = 1 - \frac{2}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{1+\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$.

309. $secx = \frac{1}{csx} = (csx)^{-1}$; $cscx = (snx)^{-1}$; поэтому:

$y' = -(csx)^{-2} \cdot (-snx) - 2 \cdot (-2)(snx)^{-3} \cdot csx + e^{secx} \cdot \frac{snx}{cs^2x} =$

$= (e^{secx} + 1)\ \frac{tgx}{csx} + \frac{4ctgx}{sn^2x}$.

310. $y' = cs\sqrt{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{x}}} \cdot \frac{-1}{x^2} +$

$+ \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{x}}} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{-cs\sqrt{\frac{1}{x}}}{2x\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x-1}}$.

311. $y' = \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) + \frac{1}{arcsnx} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$

$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(\frac{1}{arcsnx} - 1\right)$.

312. $y' = 2 \cdot \frac{1}{x-5} + 3 \cdot (-1)(x-5)^{-2} = \frac{2x-13}{(x-5)^2}$.

313. $y' = \frac{1}{x^2+2x+10} \cdot (2x+2) - 4 \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{3}\right)^2} \cdot \frac{1}{3} =$

$= \frac{2x-10}{x^2+2x+10}$.

314. По формулѣ (23): $y'=3(x+2)^2.(x-2)^2+(x+2)^3.2(x-2)=$
$=(x+2)^2(x-2)(5x-2)$.

315. $y'=1\,.\,\sqrt{a+x}+x\,.\,\dfrac{1}{2\sqrt{a+x}}\,.1=\dfrac{2a+3x}{2\sqrt{a+x}}$.

316. $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{a+x}}\cdot\sqrt[3]{a^2-x^2}+\sqrt{a+x}\,.\,\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(a^2-x^2)^2}}\cdot(-2x)=$
$=\dfrac{3a^2-4ax-7x^2}{6\sqrt[6]{(a+x)^3(a^2-x^2)^4}}=\dfrac{3a-7x}{6\sqrt[6]{(a+x)(a-x)^4}}$.

317. $y'=e^{-x}.(-1).(x^3+3x^2+6x+6)+e^{-x}.(3x^2+6x+6)=$
$=-x^3e^{-x}$.

318. $y'=csx.sn(x-a)+snx.cs(x-a)=sn(2x-a)$.

319. По формулѣ (24): $y'=\dfrac{(1+x)'.(1-x)-(1+x).(1-x)'}{(1-x)^2}=$
$=\dfrac{1-x-(1+x).(-1)}{(1-x)^2}=\dfrac{2}{(1-x)^2}$.

320. $y'=\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(a-\sqrt{x}\right)-\left(a+\sqrt{x}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(a-\sqrt{x}\right)^2}=$
$=\dfrac{a}{\left(a-\sqrt{x}\right)^2\sqrt{x}}$.

321. $y'=\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{a+x}}\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{x}\right)-\sqrt{a+x}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{x}\right)^2}=$
$=\dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)\sqrt{a}}{2\sqrt{x(a+x)}\left(\sqrt{a}+\sqrt{x}\right)^2}$.

322. $y'=\dfrac{6a^2x(a-x)(a^2+x^2)^2}{(a^3+x^3)^3}$.

323. $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{a+bx}{a-bx}}}\cdot\dfrac{2ab}{(a-bx)^2}=\dfrac{ab}{(a-bx)\sqrt{a^2-b^2x^2}}$.

324. $y'=\dfrac{2(x^2-5x+1)}{(x^2-1)^2}$.

325. $y'=\dfrac{4(3-x^2)}{(3-2x+x^2)^2}$.

326. $y'=-\frac{2a^2x}{(a^2+x^2)\sqrt{a^4-x^4}}$. **327.** $y'=\frac{18}{x^4\sqrt{7x^2-9}}$.

328. $y'=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$. **329.** $y'=\frac{lgx-1}{lg^2x}$.

330. $y'=\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}e^{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$.

331. $y'=\frac{2e^xsnx}{1+sn2x}$. **332.** $y'=\frac{1}{xe^xlg10}-y$.

333. $y'=\frac{1}{1+x^2}$. **334.** $y'=\frac{1}{2(1+x^2)}$.

335. По формулѣ (20) $y'=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+bcsx}$.

336. $y'=\frac{15cs^4x-8}{cs^5x}$.

337. $y'=\frac{1}{1+\frac{(a+x)^2}{(1-ax)^2}}\cdot\frac{1-ax+(a+x)a}{(1-ax)^2}=\underline{\frac{1}{1+x^2}}$. Замѣчательная особенность этого результата въ томъ, что онъ равенъ производной отъ $arctgx$. Такое совпаденіе объясняется тождествомъ:

$$arctg\frac{a+x}{1-ax}=arctgx+arctga,$$

причемъ производная отъ постоянной велич. $arctga$ равна всегда нулю.

338. $y'=\frac{1}{\sqrt{1-4x^2(1-x^2)}}\cdot\left[2\sqrt{1-x^2}+\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)\right]=$

$$=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Совпаденіе результатовъ вытекаетъ изъ формулы:

$2arcsnx=arcsn(2x\sqrt{1-x^2})$, т. е. $sn2z=2snz\,.\,\sqrt{1-sn^2z}$.

339. $y'=\frac{a-btgx}{a+btgx}\cdot\frac{b(1+tg^2x)(a-btgx)+b(1+tg^2x)(a+btgx)}{(a-btgx)^2}=$

$$=\frac{2ab}{(a^2-b^2tg^2x)cs^2x}.$$

340. $y'=e^{snx}(cs^2x-snx)$. **341.** $y'=arctgx$.

342. $y'=\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$.

343. Проще сперва прологариѳмировать:

$lgy=lg\pi+\frac{1}{2}lg(x+1)+\frac{9}{2}lg(x+3)-4lg(x+2)$; такъ что:

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{x+3}-4\cdot\frac{1}{x+2}=$$

$=\frac{x^2}{(x+1)(x+2)(x+3)}$; откуда $y'=y\cdot\frac{x^2}{(x+1)(x+2)(x+3)}=$

$$=\frac{\pi x^2}{(x+2)^5}\sqrt{\frac{(x+3)^7}{x+1}}.$$

344. Согласно указанію въ рѣш. № 288, пишемъ сразу:

$$y'=csc\,stgx\cdot(-sntgx)\cdot\frac{1}{cs^2x}.$$

345. По формулѣ (25) пишемъ:

$$y'=snx\cdot x^{snx}\cdot\frac{1}{x}+x^{snx}\cdot csx\cdot lgx.$$

346. $y'=\frac{1}{lgx}\cdot\frac{1}{x}$. **347.** $\frac{1}{lgx\cdot lg10}\cdot\frac{1}{x}$.

348. $y'=\frac{1}{Log_5x\cdot lg5}\cdot\frac{1}{x\cdot lg5}$.

349. $y'=-\frac{1}{\sqrt{1-lg^2snx}}\cdot\frac{1}{snx}\cdot csx$.

350. $y'=2sn\frac{x}{2}cs\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{-cs^3\frac{x}{3}}+$

$$+sn^2\frac{x}{2}\cdot e^{-cs^3\frac{x}{3}}\left(-3cs^2\frac{x}{3}\right)\left(-sn\frac{x}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}=$$

$$=\frac{1}{2}e^{-cs^3\frac{x}{3}}\left(snx+sn^2\frac{x}{2}sn\frac{2x}{3}cs\frac{x}{3}\right).$$

351. Для упрощенія предварительно замѣняемъ въ первомъ числителѣ: $2=2sn^2x+2cs^2x$, такъ что:

$$y=\frac{2}{csx}-\frac{csx}{sn^2x}+3lgtg\frac{x}{2};\ y'=\frac{0\cdot csx-2\cdot(-snx)}{cs^2x}-$$

$$-\frac{(-snx)sn^2x-csx\cdot 2snxcsx}{sn^4x}+\frac{3}{tg\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{cs^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{2snx}{cs^2x}+\frac{1+cs^2x}{sn^3x}+\frac{3}{snx}=\frac{2}{sn^3xcs^2x}.$$

352. $y'=\dfrac{\left(arcsnx+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\sqrt{1-x^2}-x\cdot arcsnx\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)}{1-x^2}+$

$$+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)=\frac{(1-x^2)arcsnx+x\sqrt{1-x^2}+x^2arcsnx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}-$$

$$-\frac{x}{1-x^2}=\frac{arcsnx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

353. По формулѣ (25): $y'=x^{x-1}\cdot x\cdot 1+x^x\,lgx\cdot 1=x^x(1+lgx)$.

354. Аналогично: $y'=e^{x^{e^{x-1}}}\cdot x^{e^x}\cdot 1+e^{x^e}\cdot lgx\cdot e^{x^x}=x^{e^x}\cdot e^{x^e}\left(\dfrac{1}{x}+lgx\right)$.

355. Аналогично № 353, $y'=x^{x^x}\cdot x^{x^x}\left(\dfrac{1}{x}+lgx+lg^2x\right)$.

356. $y'=-arcsn\sqrt{1-x^2}$.

357. $y'=x\cdot arccosx-\left(\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{1}{2}\sqrt{1-x^2}-$

$$-\frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)=x\cdot arccosx.$$

359. $y'=8ctg^5 x csx$.

359. $y=x^{\frac{1}{x}}$, и по формулѣ (25) $y'=\frac{\sqrt[x]{x}}{x^2}(1-lgx)$.

360. Распространяя формулу (23) на случай нѣсколькихъ множителей, имѣемъ:

$$(u.v.w\ldots z)'=u'.v.w\ldots z+v'.u.w\ldots z+w'.u.v\ldots z+z'.u.v\ldots w.$$

Поэтому здѣсь $y'=csx\,.\,csx\,.\,lgx+(-snx)snx\,.\,lgx+$

$$+\frac{1}{x}\,.\,snx\,.\,csx=cs2x\,.\,lgx+\frac{1}{2x}\,.\,sn2x.$$

361. $y'=csx\,.\,arcsnx+\frac{snx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{cs^2x}arctgx+\frac{tgx}{1+x^2}$.

362. $y=\frac{10}{lgsnax}$; $y'=\frac{-10a\,.\,ctgax}{lg^2 snax}$.

363. Здѣсь 6 послѣдовательныхъ функцій; степень, lg, sn, степень, cos, и еще разъ степень; поэтому:

$$y'=4lg^3 sncs^2x^3\,.\,\frac{1}{sncs^2x^3}\,.\,csecs^2x^3\,.\,2csx^3\,.\,(-snx^3)\,.\,3x^2.$$

364. Сложная изъ 4-хъ послѣдоват. функцій: lg, sn, корень кв. и дробь; поэтому:

$$y'=\frac{1}{sn\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}}.cs\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,.\,\frac{1}{2\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}}\,.\,\frac{a-x-(-1)\,.\,(a+x)}{(a-x)^2}=$$

$$=\frac{a}{(a-x)\sqrt{a^2-x^2}}ctg\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}.$$

365. $y'=\frac{1}{arctg\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\frac{snx-csx}{tgx}\right)}\,.\,\frac{1}{1+\frac{a}{b}\,.\,\frac{1-sn2x}{tg^2x}}\,.$

$$.\sqrt{\frac{a}{b}}\,.\,\frac{(csx+snx)tgx-(1+tg^2x)(snx-csx)}{tg^2x}\,.$$

366. Если двѣ функціи даютъ одинаковыя производныя, то это еще не значитъ, что сами функціи равны; на основаніи формулъ (6) и (7) можно лишь заключить, что эти функціи отличаются другъ отъ друга на постоянную величину; и только убѣдившись (путемъ подстановки), что эта постоянная величина равна нулю, мы вправѣ утверждать, что и сами функціи равны.

Зная изъ формулы (20) производную лѣвой части, ищемъ ее отъ правой; получается та же величина $= \frac{1}{1+x^2}$, такъ что: $arctgx = arcsn\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$ . . . . (1).

Подставляемъ $x=0$; (1) даетъ: $0=0+C$, изъ чего заключаемъ, что $C=0$, ч. т. д.

366а. Рѣшается аналогично.

367. Общая величина производной $= \frac{5(1+6x^2)}{1+13x^2+36x^4}$. Ходъ рѣшенія тотъ-же.

367а. Сперва находимъ общій видъ производной; получается: $f'(x)=\frac{5x^3}{(5x-4)^3}$; при $x=1$, будетъ: $f'(1)=5$.

367b. Аналогично: $f'(x) = -\frac{1}{x^2(1+x)^4}$; при $x=-0{,}5$, будетъ: $f'(-0{,}5)= -64$.

368. 1), 2), 4) и 5) возрастаютъ, такъ какъ при всякомъ x, у нихъ $y'>0$, остальныя функціи—убывающія.

369. $y'=3(x^2-4x+3)$; корни y' суть: 1 и 3, слѣд. $f'(x)=3(x-1)(x-3)$. Чтобъ судить, имѣетъ ли мѣсто maximum или minimum, испытываемъ сперва $x=1$; составляемъ: $f'(1-h)=3(1-h-1)(1-h-3)=+$(числ. знач.); $f'(1+h)=3(1+h-1)(1+h-3)=-$(ч. зн.); такой переходъ отъ $+$ къ $-$ указываетъ на maximum при $x=1$. Испытывая $x=3$, убѣждаемся: $f'(3-h)=-$(ч. зн.) и $f'(3+h)=+$(ч. зн.), слѣд., minimum при $x=3$. Для ясности можно составить таблицу:

Испыт. корни.	$f'(c-h)$.	$f'(c+h)$.	Значенія.
1	+	—	maximum.
3	—	+	minimum.

Повѣрка: Примѣняя 2-ой способъ, находимъ: $y''=6x-12$; при $x=1$, $y''<0$, слѣд. max.; при $x=3$, $y''>0$, слѣд. minim., ч. т. д.

370. Аналогично: при $x=1$—minimum, а при $x=-5$ — maximum.

371. При $x=-1$—maximum., а при $x=1$—minimum.

372. При $x=1$—minimum.

373. При $x=\frac{\pi}{3}$ — maximum (въ границахъ 1-ой окружности).

374. При $x=\frac{3}{4}a$—maximum.

375. При $x=\frac{1}{2}$—minimum; при $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ производная обращается въ ∞ (т. е., функція претерпѣваетъ „разрывъ“); но такъ какъ при этомъ она своего *знака не мѣняетъ*, то эти значенія не даютъ ни max., *ни minim.*

376. При $x=0$ minimum.

377. При $x=3$—max.; при $x=5$—minimum.

378. При $x=0$—minimum; при $x=2$—ни max., ни minimum.

379. При $x=3$ и $x=-6$—max.; при $x=6$ и $x=-3$—minim.

380. При $x=a$—minimum.

381. $y'=\frac{x-3}{(1+x)^3}$; здѣсь корни числителя и знаменателя суть $x=3$ и $x=-1$; составляемъ таблицу:

корни	$f'(c-h)$	$f'(c+h)$	знач. $f(x)$
3	—	+	min.
—1	+	—	max.

т. е., претерпѣвая разрывъ при $x=-1$, данная функція проходитъ при этомъ черезъ свой maximum.

382. При $x=2$—max., при $x=0$—minim.

383. Подобно № 381, надо брать и корни знам., но такъ какъ какъ этотъ корень, $x=1$, не вызываетъ перемѣну знака 1-ой производной, то онъ не даетъ ни max., ни min.; только изъ числителя получаемъ minimum при $x=e$.

384. Корень числителя производной: $x=\frac{1}{lga}>0$, слѣд., таблица даетъ при этомъ — minimum. Корень знаменателя, не вызываетъ перем. знака.

385. При $x=\frac{a}{\sqrt{3}}$ — max., при $x=-\frac{a}{\sqrt{3}}$ —minim.

386. $y'=sn(a+2x)$; при $y'=0$, $a+2x=k\pi$; $x=k\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2}$;

$x_1=\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2}$; $x_2=\pi-\frac{a}{2}$; $x_3=3\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2}$; $x_4=2\pi-\frac{a}{2}$.

Составляемъ таблицу знаковъ:

корни	$f'(c-h)$	$f'(c+h)$	значенія
$\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2}$	+	—	max.
$\pi-\frac{a}{2}$	—	+	min.
$3\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2}$	+	—	max.
$2\pi-\frac{a}{2}$	—	+	min.

Слѣд., въ каждой нечетной четверти данная функція имѣетъ свой max., а въ четныхъ minimum.

387. При $x=\frac{1}{e}$, minimum (см. рѣш. № 353).

388. Корень $y'=0$: $x=(2k+1)\frac{\pi}{4}$; при k—четномъ—maximum y, а при k—нечетномъ—minimum.

388а. Корень производной: $x = arctg\,\frac{b}{a}$; $x_1 = \alpha$ (1-й четв.)

и $x_2 = \pi + \alpha$; тогда $sn\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $cs\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$;

$$sn(\pi+\alpha) = \frac{b}{-\sqrt{a^2+b^2}};\quad cs(\pi+\alpha) = \frac{a}{-\sqrt{a^2+b^2}};$$

$$f''(\alpha) = \frac{-a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} < 0 \text{ и } f'(\pi+\alpha) = \frac{-a^2-b^2}{-\sqrt{a^2+b^2}} > 0,$$

слѣд., при $x = arctg\,\frac{b}{a} = \alpha$ maximum y, а при $x = \pi + \alpha$—minim.

389. Здѣсь годится только 2-й способъ:
$f'(x) = e^x - 2snx - e^{-x}$; ея корень, очевидно, $x = 0$;
$f''(x) = e^x - 2csx + e^{-x}$; такъ какъ $f''(0) = 0$, то составляемъ слѣдующія: $f'''(x) = e^x + 2snx - e^{-x}$; и она при $x = 0$ обращается въ нуль; наконецъ $f^{IV}(x) = e^x + 2csx + e^{-x}$; $f^{IV}(0) = 4 > 0$, слѣд., при $x = 0$ minimum. Вообще слѣдуетъ замѣтить, что если 2-ая производная обращается въ нуль, при $x =$ корню 1-ой производной, что нужно составить 3-ью и 4-ую и т. д., и первая изъ необращающихся въ нуль производныхъ рѣшаетъ вопросъ: если она нечетнаго порядка — то не существуетъ ни max., ни minim.; если же она четнаго порядка, то по ея знаку судятъ о max. или minim., какъ если бы она была 2-го порядка.

390. Составивъ таблицу, видимъ, что при $x = 2$—maxim., а при $x = -2$—minimum.

391. Испытываемъ корни числителя и знаменателя производной:

корень c	$f'(c-h)$	$f'(c+h)$	
$\frac{2}{5}$	—	+	min.
0	+	—	max.

т. е., maximum при $x = 0$, а minimum при $x = \frac{2}{5}$.

392. Составляемъ 2 разности:

$$f(x)=x-lg(1+x)\ldots(1)\text{ и }F(x)=lg(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2\ldots(2).$$

Требуется доказать, что обѣ функціи положительны при всякомъ $x>0$. Достаточно показать, что при $x=0$ онѣ *не отрицательны*, и затѣмъ возрастаютъ, т. е. что ихъ 1-я производныя положительны; дѣйствительно: $f(0)=F(0)=0$;

$$f'(x)=1-\frac{1}{1-x}=\frac{x}{x+1}>0 \text{ при } x>0;$$

$$\text{и } F'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{x^2}{1+x}>0;\ ч.\ т.\ д.$$

393. Аналогично: $\frac{x^2}{1+x^2}>0$ и $\frac{x^4}{1+x^2}>0$; $f(0)=F(0)=0$.

394. $f(x)=x-\frac{1}{3}tgx-\frac{2}{3}snx$; $f(0)=0$;

$$f'(x)=1-\frac{1}{3}(1+tg^2x)-\frac{2}{3}csx=\frac{2}{3}(1-csx)-\frac{1}{3}tg^2x=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot 2sn^2\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\frac{sn^2x}{cs^2x}=\frac{4}{3}sn^2\frac{x}{2}\left(cs^2x-cs^2\frac{x}{2}\right)sec^2x<0$$

ибо въ 1 ой четверти $csx<cs\frac{x}{2}$, слѣд., $f(x)$ всегда отрицат.

395. $f(x)=1-\frac{1}{2}x^2-csx$; $F(x)=csx-1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{16}x^4$.

$f(0)=F(0)=0$; $f'(x)=-x+snx=-(x-snx)<0$, для 1-ой четверти;

$$F'(x)=-snx+x-\frac{x^3}{4}=(x-snx)-\frac{x^3}{4}<0,$$

такъ какъ для дугъ 1-ой четверти $x-snx<\frac{x^3}{4}$. Итакъ, обѣ функціи, начиная съ нуля, убываютъ, а потому обѣ отрицательны, ч. т. д.

396. Обозначивъ лѣвую часть черезъ $f(x)$, опредѣляемъ ея *max. и min.*, и найдя соотвѣтствующія значенія $f(x)$, судимъ о томъ, сколько разъ она проходитъ черезъ нуль— столько вещественныхъ корней и имѣется. Въ данномъ случаѣ, $f'(x)=6(x^2+x+1)$ всегда положительна (по свойству квадратнаго неравенства), слѣд., $f(x)$ — возрастающая. Но $f(0)=1$; $f(-10)<0$, слѣд., всего *одинъ вещ.* корень она имѣетъ между нулемъ и -10.

397. Аналогично: $f'(x)=6(x^2+x-1)$; она обращается въ въ нуль при $x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ и при $x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$; по 2-й производной легко опредѣлить, что x_1 соотвѣтствуетъ minimum $f(x)$, а x_2—max. Вычисляемъ приближенныя значенія функцій: $f\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)=-9$ съ дробью; $f\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)=2$ съ дробью; $f(0)=-7$. Итакъ, maximum $f(x)$ оказался положительнымъ, а minimum отрицательнымъ, слѣдоват., одинъ вещ. корень заключенъ между этими значеніями; кромѣ того, при $x=-\infty$, $f(-\infty)=-\infty$, а при $x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ она же >0, слѣд., одинъ еще корень былъ до достиженія max. $f(x)$; наконецъ изъ сравненія, что $f\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)<0$, а $f(+\infty)=+\infty$ видимъ, что есть еще и 3-ій вещ. корень, между $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ и $+\infty$.

398. Аналогично находимъ: $x_1=1$; $x_2=-1$; $f(1)=-1$— minimum $f(x)$; $f(-1)=3$—*maximum*. Слѣдоват., одинъ вещ. корень между -1 и $+1$. Кромѣ того, $f(-\infty)=-\infty$; $f(+\infty)=+\infty$, слѣд., есть еще 2 вещ. корня; между $-\infty$ и -1, и между $+1$ и $+\infty$.

399. $f(1)=8$—max.; $f(3)=4$—minimum. Такъ какъ $f(-\infty)=-\infty$; $f(\infty)=+\infty$, то одинъ вещ. корень между $-\infty$ и $+1$ а больше ихъ нѣтъ, потому что послѣ $x=3$, $f(x)$ возрастаетъ, оставаясь все время положительной.

400. $f(1)=-4$—соотв. minimum; $f(-\frac{1}{2})=2\frac{3}{4}$—maximum. Такъ какъ, начиная съ $x=-\infty$ до $x=-\frac{1}{2}$, $f(x)$ непрерывно возрастаетъ, принимая всевозможныя значенія отъ $-\infty$ до $2\frac{3}{4}$, то при нѣкоторомъ значеніи x она проходитъ черезъ 0, т. е. одинъ вещ. корень заключается между $-\infty$ и $-\frac{1}{2}$. Въ *промежуткѣ* значеній x отъ $-\frac{1}{2}$ до $+1$ сама $f(x)$ убываетъ, измѣняясь отъ $2\frac{3}{4}$ до -4, и слѣдовательно, еще разъ проходитъ черезъ нуль—это 2-й вещ. корень. Наконецъ, при $x>1$, $f(x)$ все время возрастаетъ, принимая всѣ значенія отъ -4 до $+\infty$, а, слѣд., въ 3-ій разъ проходитъ черезъ нуль—это 3-ій вещ. корень.

401. Постепенныя измѣненія $f(x)$ таковы:

знач. x . .	$-\infty$	. . . .	-2	. . . .	-1	. . .	$+1$	. .	$+2$	. . $+\infty$
знач. $f(x)$.	$-\infty$	возр.	-12	убыв.	-34	возр.	42	. . .	20	. . $+\infty$
			(max.)		(min.)		(max.)		(min.)	

Слѣд. $f(x)$ только одинъ разъ мѣняетъ знакъ, именно, въ промежуткѣ отъ -1 до $+1$, и здѣсь находится единственный ея вещ. корень.

402. Ни одного вещ. корня, такъ какъ $f(x)$ при всякомъ $x>0$ положительна.

403. Обозначимъ радіусъ основанія и высоту даннаго конуса черезъ r и h, а черезъ x и y радіусъ основ. и высоту вписаннаго въ него (какого-нибудь) цилиндра. Изъ подобія $\triangle\triangle$-овъ слѣдуетъ пропорція: $\frac{y}{h}=\frac{r-x}{r}$, откуда: $y=$

$=\frac{h}{r}(r-x)$ . . . . . (1). Искомый $V=\pi x^2 y=\pi x^2 \cdot \frac{h}{r}(r-x)$;

выдѣляя постоянныхъ множит., пишемъ: $V=\frac{\pi h}{r}(rx^2-x^3)$. .(2).

Отсюда замѣчаемъ, что измѣненія V соотвѣтствуютъ измѣненіямъ $f(x)=rx^2-x^3$ . . . (3). Обычнымъ способомъ находимъ, что maximum $f(x)$ имѣетъ мѣсто при $x=\frac{2}{3}r$, или, что̀ все равно, на основаніи (1), при $y=\frac{1}{3}h$. Итакъ, искомый цилиндръ долженъ имѣть высоту, втрое меньшую, чѣмъ у даннаго конуса.

404. Обозначимъ черезъ r—радіусъ шара, черезъ x и y—радіусъ основанія и высоту всякаго впис. въ него цилиндра. Изъ чертежа (взявъ осевое сѣченіе) получается зависимость: $4r^2=4x^2+y^2$ . . . . . (1). Но объемъ цилиндра $V=\pi x^2 y$; чтобъ сдѣлать V функціей отъ одного перемѣннаго, здѣсь удобнѣе опредѣлить изъ (1): $x^2=\frac{4r^2-y^2}{4}$ (а не наоборотъ, во избѣжаніе появленія квадр. корня); такъ что $V=\frac{\pi}{4}(4r^2y-y^3)$. Находимъ *maxim.* $f(y)=4ry-y^3$; это будетъ при $y=\frac{2r}{\sqrt{3}}=\frac{2}{3}r\sqrt{3}$. Итакъ, высота искомаго цилиндра$=\frac{2}{3}$ стороны прав. впис. въ большой кругъ $\triangle$—ка.

405. Сохраняя обозначенія № 403, пишемъ: бок. пов. цил. $S=2\pi xy=2\pi\frac{h}{r}(rx-x^2)$; max. $f(x)=rx-x^2$ имѣетъ мѣсто при $x=\frac{r}{2}$. Слѣд., у искомаго цилиндра радіусъ основанія вдвое менѣе, чѣмъ у даннаго конуса.

406. Пусть радіусъ шара $=r$; радіусъ основ. конуса$=x$; высота его$=y$; образующая $=l$. Зная, что хорда есть среднепропорц. между всѣмъ діаметромъ и своей проекціей на него, пишемъ зависимость: $l=\sqrt{2r.y}$ . . . (1) и кромѣ того, $x=\sqrt{y(2r-y)}$ . . . (2).

Искомая бок. пов. $S=\pi xl=\pi\sqrt{2r}\,.\,\sqrt{2ry^2-y^3}$. Очевидно, max. S соотвѣтствуетъ max. $f(y)=2ry^2-y^3$; но этотъ max. имѣетъ мѣсто при $y=\frac{4}{3}r$, слѣдоват., высота искомаго конуса составляетъ $\frac{2}{3}$ діаметра шара.

407. Сохраняя обозначенія № 406, пишемъ:

$$V=\frac{\pi}{3}x^2\,.\,y=\frac{\pi}{3}y^2(2r-y).$$

Такъ какъ $f(y)$ здѣсь та же, что и въ № 406, то и *отвѣтъ тотъ же.*

408. Аналогично предыд.; высота цил. $=r\sqrt{2-\frac{2}{5}\sqrt{5}}$, гдѣ r—радіусъ шара.

409. Если радіусъ шара обозначимъ черезъ R, радіусъ и высоту опис. конуса черезъ r и h, и уголъ при вершинѣ

конуса въ осевомъ его сѣченіи черезъ $2x$, то имѣемъ зависимость: $r=h\,.\,tgx$ и $R=(h-R)snx$,

откуда: $h=R\dfrac{1+snx}{snx}$ и $r=R\dfrac{1+snx}{csx}$.

Тогда: $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{\pi}{3}R^3\dfrac{(1+snx)^3}{snx\,.\,cs^2x}=\dfrac{\pi}{3}R^3.\dfrac{(1+snx)^2}{snx(1-snx)}$.

Находимъ minimum $f(x)=\dfrac{1+2snx+sn^2x}{snx-sn^2x}$. Такъ какъ $csx=0$ и $1+snx=0$ не годятся, то этотъ min. наступаетъ при $snx=\frac{1}{3}$, т. е., у искомаго конуса *синусъ угла между высотой и образующей равенъ* $\frac{1}{3}$.

410. Пусть дано: $v=const.$, x и y—объемъ, радіусъ основанія и высота одного и того же цилиндра тогда $\pi x^2y=v$. (1) и искомая $S=2\pi xy+2\pi x^2$ . . (2). Исключивъ y изъ (1) и (2), находимъ $S=2\left(\pi x^2+\dfrac{v}{x}\right)$; минимумъ этой функціи имѣетъ мѣсто при $x=\sqrt[3]{\dfrac{v}{2\pi}}$; тогда изъ (1) находимъ: $y=2x$, т. е., у искомаго цилиндра *высота равна діаметру основанія.*

411. Подобно № 409, но принимая $l=const.$, находимъ max. v при $tgx=\sqrt{2}$, т. е. *тангенсъ* угла между высотой и образующей *равенъ* $\sqrt{2}$.

412. Пусть гипотенуза $a=const.$ Одинъ изъ острыхъ угловъ обозначимъ черезъ x; тогда площадь $S=\frac{1}{2}asnx\,.\,acsx=\frac{1}{4}a^2sn2x$; очевидно, max. S при $sn2x=1$, т. е. $x=\dfrac{\pi}{4}$; слѣд. искомый $\triangle$ *равнобедренный.*

413. Пусть a—сторона даннаго квадрата, x и $(a-x)$—отрѣзки, образуемые на ней вершиной вписаннаго кв., y—сторона впис. кв. Тогда его площ. $S=y^2=x^2+(a-x^2)$.

Но min. $f(x)=x^2+a^2-2ax+x^2$ имѣетъ мѣсто при $x=\dfrac{a}{2}$, слѣд., *вершины искомаго* кв. *лежатъ на серединахъ сторонъ* даннаго.

414. За независимое перемѣнное здѣсь удобнѣе всего принять время, протекшее отъ начала движенія; черезъ x часовъ 1-ый поѣздъ будетъ отстоять отъ точки C на разстояніе: $100-30x$, а 2-ой на $50-40x$ верстъ. Разстояніе же

между поѣздами соотвѣтствуетъ гипотенузѣ и равно $d=\sqrt{(100-30x)^2+(50-40x)^2}=50\sqrt{x^2-4x+5}$. Очевидно, minimum d наступитъ при minimum $f(x)=x^2-4x+5$; но послѣдній minimum имѣетъ мѣсто при $x=2$, слѣд., искомое кратчайшее разстояніе $d=50\sqrt{4-8+5}=50$, т. е., равно 50 верстамъ и соотвѣтствуетъ тому расположенію, когда 1-ый поѣздъ находится въ 40 верстахъ къ западу отъ C, а 2-ой—въ 30 вер. къ югу отъ C, черезъ 2 часа послѣ начала движенія.

415. Аналогично: $d=\sqrt{(a-v_1x)^2+(b-v_2x)^2}$ minimum d имѣетъ мѣсто при $x=\frac{av_1+bv_2}{v_1^2+v_2^2}$, т. е., когда 1-ый поѣздъ отстоитъ на $\frac{v_2(av_2-bv_1)}{v_1^2+v_2^2}$ отъ C, а 2-ой на $\frac{v_1(bv_1-av_2)}{v_1^2+v_2^2}$ отъ C, причемъ слѣдуетъ имѣть въ виду правило знаковъ Декарта.

416. Пусть сторона вырѣзаннаго квадрата равна x; такова же, очевидно, высота полученной коробки, а основаніе ея имѣетъ длину $24-2x$ и ширину $9-2x$. Поэтому объемъ параллелопипеда: $V=(24-2x)(9-2x)x=216x-66x^2+4x^3$; находимъ: $V_x'=216-132x+12x^2$. При $x=2$ *max*. $V=200$ куб. сантиметровъ.

417. Аналогично: $V=abx-2(a+b)x^2+4x^3$. *Max*. V имѣетъ мѣсто при $x=\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$.

418. Обозначимъ діаметръ полукруга черезъ x, а высоту *прямоугольника*—черезъ y; по заданію имѣемъ: $x+2y+\frac{\pi x}{2}=2p$ . . . (1). Тогда площадь окна $S=xy+\frac{\pi x^2}{8}$; подставивъ сюда изъ (1): $y=p-\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}x$ . . . (3), находимъ: $S=px-\frac{x^2}{2}-\frac{\pi}{8}x^2$; опредѣляемъ *max*. S при $x=\frac{p}{1+0{,}25\pi}$; тогда изъ (3): $y=\frac{p}{2+0{,}5\pi}=\frac{x}{2}$, слѣдоват., *высота прямоугольника равна радіусу полукруга*.

Въ задачахъ №№ 419—548 величина интеграла обозначена черезъ J.

419. По формулѣ (26) искомый результатъ

$$J=\int x^{\frac{3}{5}}dx=\frac{x^{\frac{8}{5}}}{^8/_5}+C=\frac{5}{8}x\sqrt[5]{x^3}+C.$$

420. $J=\int x^{-4}dx=\frac{x^{-4+1}}{-4+1}+C=-\frac{1}{3x^3}+C.$

421. $J=\int x^{-\frac{3}{10}}dx=\frac{x^{7/10}}{7/10}+C=\frac{10}{7}\sqrt[10]{x^7}+C.$

422. По формулѣ (29) $J=\frac{5^x}{lg5}+C.$

423. По формулѣ (30) $J=\frac{1}{2}sn2x+C.$

424. По формуламъ (36) и (31) $J=-3csx+C.$

425. Аналогично: $J=-\frac{1}{3}cs3x+C.$

426. Сравнивая съ формулой (34), видимъ, что нужно устранить коэфф. при x^2; для этого обозначимъ: $2x=z$. . (1); дифференцируемъ (1): $2dx=dz$, откуда $dx=\frac{1}{2}dz$ . . . . . (2). Тогда $J=\int\frac{1}{2}\cdot\frac{dz}{1+z^2}=\frac{1}{2}arctgz+C=\frac{1}{2}arctg2x+C.$

427. Аналогично № 426 и по той же причинѣ полагаемъ: $x=2z$ . . . (1), $dx=2dz$ . . . (2), такъ что $J=\int\frac{2dz}{4+4z^2}=$
$=\frac{1}{2}\cdot\int\frac{dz}{1+z^2}=\frac{1}{2}arctgz+C=\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2}+C.$

428. Чтобъ свести къ формулѣ (33), полагаемъ: $3x=z$; слѣд., $dx=\frac{dz}{3}$ и $J=\int\frac{1}{3}\cdot\frac{dz}{sn^2z}=-\frac{1}{3}ctgz+C=-\frac{1}{3}ctg3x+C.$

429. $J=\int\frac{snx}{csx}dx=\int\frac{snxdx}{csx}=\int\frac{-dcsx}{csx}$; по формулѣ (27) $J=-lgcsx=lg\frac{1}{csx}=lgsecx+C.$

430. Аналогично: $J=\int\frac{dsnx}{snx}=lgsnx+C.$

431. Обозначивъ $2x+a=z$; $dx=\frac{1}{2}dz$; $J=\frac{1}{2}sn(2x+a)+C.$

432. Пользуясь формулами (37), (36) и (26), находимъ:

$$J=a^2x+\frac{ax^2}{2}+\frac{x^3}{3}+C.$$

433. Аналогично: $J=ax+blgx-\frac{c}{x}+C.$

434. $J=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{1/2}-\frac{x^{\frac{1}{3}}}{1/3}+C=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+C.$

435. $J=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{3}{4}x^{\frac{8}{3}}+\frac{8}{17}x^{\frac{17}{6}}-\frac{8}{81}x^{3}$.

436. Полагая $x-2=z$, по (34) находимъ $J=arctg(x-2)+C$.

437. Полагая $x^2=z$, аналогично находимъ $J=arctgx^2+C$.

438. Полагая $x=az$, находимъ $dx=adz$; $J=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C$

439. Аналогично № 436 $J=arcsn(x-1)+C$.

440. $J=\frac{3}{\pi}arcsnx+C$.

441. По (36) и (37) $J=-6x^{-\frac{1}{2}}+30x^{\frac{1}{6}}+C$.

442. $J=\int e^{-x}dx=-e^{-x}+C$.

443. По (37) $J=\frac{1}{4}e^{4x}-e^{2x}+x+C$.

444. Аналогично $J=\frac{1}{2}e^{2x}+x-\frac{1}{2}e^{-2x}+C$.

445. Полагаемъ $ax+b=z$; $dx=\frac{dz}{a}$; $J=\frac{1}{a}\int z^n dz=$

$=\frac{z^{n+1}}{(n+1)a}+C=\frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a}+C$.

446. Полагая $e^{snx}=z$, имѣемъ: $e^{snx}.csx.dx=dz$;

$J=\int dz=z+C=e^{snx}+C$.

447. $J=\frac{1}{5}sn5x+C$.

448. Полагаемъ: $a-3x=z$; $-3dx=dz$; $J=\int csz.\frac{dz}{-3}=$

$=-\frac{1}{3}snz+C=-\frac{1}{3}sn(a-3x)+C$.

449. По (32) $J=tg(x-a)+C$.

450. Подобно № 429, но еще умножая и дѣля на 10, находимъ: $J=-\frac{1}{10}lgcs10x+C$; полагая $e^c=C_1$, преобразуемъ:

$J=lg\frac{C_1}{\sqrt[10]{cs10x}}$.

451. Полагая $tgx=z$; $\frac{dx}{cs^2x}=dz$, имѣемъ: $J=\int z^3dz=$

$=\frac{z^4}{4}+C=\frac{1}{4}tg^4x+C$.

452. Аналогично $J=-\frac{2}{3}\sqrt{ctg^3x}+C$.

453. Пусть $1+x^m=z$; $mx^{m-1}dx=dz$, т. е. $J=\frac{1}{m}\int\frac{dz}{z}=$
$=\frac{1}{m}lgz+C=$(см. № 450)$=lg(C_1\sqrt[m]{1+x^m})$.

454. Пусть $a+x=z$; $J=\int z^{-\frac{1}{2}}dz=2z^{\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{a+x}+C$.

455. Аналогично: $J=-\frac{1}{2}\sqrt[3]{(2-3x)^2}+C$.

456. Аналогично: $J=\frac{1}{b}lg(a+bsnx)+C=$(см. рѣш. №450)$=$
$=lg(C_1\sqrt[b]{a+bsnx})$.

457. Аналогично: $J=2\sqrt{e^x-a}+C$.

458. Полагаемъ $arctgx=z$; по (34) будетъ: $J=\int\frac{dz}{z}=$
$=lgz+C=lg(C_1z)=lg(C_1arctgx)$.

459. Аналогично: $J=lg(C_1arcsnx)$.

460. Аналогично: $J=\frac{3}{2}\sqrt[3]{(arcsnx)^2}+C$.

461. Извѣстно, что $sn^2x=\frac{1-cs2x}{2}$; поэтому
$J=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}sn2x+C$.

462. Аналогично: $J=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}sn2x+C$.

463. $tg^2x=\frac{sn^2x}{cs^2x}=\frac{1-cs^2x}{cs^2x}=\frac{1}{cs^2x}-1$; поэтому
$J=tgx-x+C$.

464. Аналогично: $J=-ctgx-x+C$.

465. Умножаемъ числителя на *тригонометрическую единицу*: $1=sn^2x+cs^2x$, отчего величина его, конечно, не измѣнится; тогда: $J=\int\frac{snxdx}{csx}+\int\frac{csxdx}{snx}=$(см. № 429 и 430)$=$
$=-lgcsx+lgsnx+C=lgtgx+C$.

466. Замѣнивъ $sn2x=2snxcsx$, получаемъ, на основаніи № 465, $J=lg\sqrt{tgx}+C$.

467. Замѣнивъ $snx = 2sn\frac{x}{2}\,cs\frac{x}{2}$, получаемъ, на основаніи № 465, $J = lgtg\frac{x}{2} + C$.

468. Отвѣтъ тотъ-же, такъ какъ $cscx = \frac{1}{snx}$

469. Замѣняемъ: $csx = sn\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$

$= 2sn\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) cs\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$.

Пусть $\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = z$; $dx = -2dz$; тогда, на основаніи № 465,

$J = -lg\,tgz + C = lg\,ctg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + C$.

470. Отвѣтъ тотъ-же, такъ какъ $secx = \frac{1}{csx}$.

471. Замѣняемъ: $1 + csx = 2cs^2\frac{x}{2}$; $J = tg\frac{x}{2} + C$.

472. $J = \frac{1}{3}e^{3x} + 2e^{\frac{x}{2}} + C$.

473. При пользованіи формулой (38), за dv принимаемъ того множителя (включая и dx), который сразу подходитъ подъ формулы § 10, а всѣ остальные множители—даютъ величину u.

Потомъ по готовой формулѣ § 10 пишемъ v, и отъ u беремъ дифференціалъ; все это подставляемъ въ (38), и полученный на правой части интегралъ обыкновенно гораздо проще первоначальнаго.

Въ данномъ примѣрѣ, очевидно, $dv = dx$, $lgx = u$; $v = x$ (постоянное C, вообще, отбрасывается) $du = \frac{dx}{x}$; формула (38) даетъ:

$J = x \,.\, lgx - \int x \,.\, \frac{dx}{x} = xlgx - x + C$.

474. Пусть $csxdx = dv$; $x = u$; тогда:

$v = snx$, $du = dx$; (38) даетъ: $J = x \,.\, snx - \int snx\,dx =$

$= xsnx + csx + C$.

475. Кромѣ способа, указаннаго въ рѣш. № 461, можно по (38) обозначить: $snx=u$; $snxdx=v$; тогда: $v=-csx$; $du=csxdx$; $J=snx.(-csx)-\int(-csx).csxdx=-snxcsx+\int cs^2xdx$; но $cs^2x=1-sn^2x$, поэтому $J=-snxcsx+x-J$; отсюда

$$J=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}snxcsx+c.$$

476. Пусть: $x^3dx=dv$; $lgx=u$; тогда $v=\frac{x^4}{4}$; $du=\frac{dx}{x}$;

$$J=\frac{x^4}{4}lgx-\int\frac{x^4}{4}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{x^4}{4}lgx-\frac{1}{16}x^4+c.$$

477. Пусть: $dx=dv$; $arctgx=u$; тогда $v=x$; $du=\frac{dx}{1+x^2}$;

$J=x.arctgx-\int\frac{x.dx}{1+x^2}$ . . . (1). Въ послѣднемъ равенствѣ интегралъ рѣшается по правилу (*c*) § 11, такъ что $\int\frac{xdx}{1+x^2}=\frac{1}{2}lg(1+x^2)+c$; поэтому (1) принимаетъ видъ:

$$J=xarctgx-\frac{1}{2}lg(1+x^2)-c.$$

478. Аналогично: $J=x.arcsnx-\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=xarcsnx-\int(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}.xdx$ . . . (1); полагая здѣсь: $1-x^2=z$, находимъ:

$$J=x.arcsnx+\sqrt{1-x^2}+c.$$

479. Пусть $xdx=dv$; $arctgx=u$; тогда:

$J=\frac{x^2}{2}arctgx-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}\cdot dx$ . . . .(1). Въ числителѣ дроби послѣдняго интеграла прибавимъ и отнимемъ по единицѣ, такъ что $\int\frac{x^2}{1+x^2}\cdot dx=\int\frac{(x^2+1)-1}{1+x^2}\cdot dx=\int dx-\int\frac{dx}{1+x^2}=x-arctgx$ . . . (2). Тогда (1) принимаетъ видъ:

$$J=\frac{x^2}{2}arctgx-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}arctgx+c.$$

480. Обозначивъ $xdx=dv$, получаемъ

$$J=\frac{x^2}{2}lg^2x-\int\frac{x^2}{2}\cdot 2lgx\cdot\frac{dx}{x}=\frac{x^2}{2}lg^2x-\int xlgxdx \ldots (1).$$

Примѣняя еще разъ то же обозначеніе въ послѣднемъ интегралѣ, получаемъ:

$$\int x lgx dx = \frac{x^2}{2} lgx - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} lgx - \frac{1}{4} x^2 \ldots (2).$$

Теперь (1) принимаетъ видъ: $J = \frac{x^2}{2}\left(lg^2 x - lgx + \frac{1}{2}\right) + c.$

481. Пусть $csxdx = dv$; тогда $J = e^{2x} snx - \int snx \cdot e^{2x} \cdot 2dx = e^{2x} snx - 2\int e^{2x} \cdot snxdx \ldots (1)$. Для нахожденія полученнаго интеграла положимъ: $snxdx = dv$, т. е. $v = -csx$; тогда $\int e^{2x} snxdx = -e^{2x} csx - \int (-csx) \cdot 2e^{2x} dx = -e^{2x} csx + 2\int e^{2x} csxdx \ldots (2)$. Но послѣдній интегралъ есть не что иное, какъ первоначальный J, поэтому (1) равенство принимаетъ видъ: $J = e^{2x} snx - 2[-e^{2x} csx + 2J]$; т. е., $J = e^{2x} snx + 2e^{2x} csx - 4J$; откуда искомое: $J = \frac{1}{5} e^{2x}(snx + 2csx) + c.$

482. Представляемъ: $sn^3 x = sn^2 x \cdot snx$ и замѣняемъ: $sn^2 x = 1 - cs^2 x$; тогда $J = \int (1 - cs^2 x)(-dcsx) = -\int dcsx + \int cs^2 x \cdot dcsx = -csx + \frac{cs^3 x}{3} + c.$

Другой способъ. Беремъ формулу: $sn3x = 3snx - 4sn^3 x$; отсюда: $sn^3 x = \frac{3snx - sn3x}{4}$; $J = \frac{1}{4}\int 3snxdx - \frac{1}{4}\int sn3xdx = -\frac{3}{4} csx + \frac{1}{12} cs3x + c$ (результаты тождественны).

483. $J = \int x \cdot \frac{dx}{sn^2 x}$; здѣсь $\frac{dx}{sn^2 x} = dv$ и тогда $J = -xctgx - \int (-ctgx) \cdot dx = -xctgx + \int ctgxdx =$ (см. № 430) $= -xctgx + lgsnx + c.$

484. Пусть $e^x dx = dv$; тогда $J = x \cdot e^x - \int e^x \cdot dx = e^x(x-1) + c.$

485. *Подобно* № 481, находимъ: $J = \frac{1}{5} e^x(cs2x + 2sn2x) + c.$

486. Подобно № 484, находимъ:

$$J = -\frac{x}{2} cs2x + \frac{1}{4} sn2x + c.$$

486а. По правилу (*c*) § 11, полагаемъ: $\sqrt{1-x^2} = z$; тогда: $1 - x^2 = z^2$; $-2xdx = 2zdz$; $J = -\int dz = -\sqrt{1-x^2} + c.$

487. Вводя множителемъ въ числителя тригонометрич. единицу (см. рѣш. № 465), имѣемъ: $J=\int \frac{dx}{cs^2x}+\int \frac{dx}{sn^2x}=$ $=tgx-ctgx+c.$

488. $J=\int x^{\frac{15}{8}}dx=\frac{8}{23}x^{\frac{23}{8}}+c.$

489. Пусть $lgx=z$; $J=\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=arcsnlgx+c.$

490. По правилу (*c*) § 11, $J=lg\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}+c.$

491. Указанное въ № 490 правило здѣсь не даетъ никакого упрощенія. Приходится прибѣгнуть къ искусственному пріему: *разложенію раціональной дроби на простѣйшія.* Онъ состоитъ въ слѣдующемъ: разлагаютъ знаменателя на „линейные“ множители, т. е. содержащіе x въ 1-ой степ., и затѣмъ составляютъ тождество, на лѣвой части котораго данная раціон. дробь, но безъ dx, а на правой сумма дробей, имѣющихъ знаменателемъ каждаго изъ упомянутыхъ линейныхъ множителей, а числители—пока неопредѣленныя величины, A, B и т. д.; итакъ, въ данномъ случаѣ:

$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{A}{x+a}+\frac{B}{x-a} \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Это тождество упрощаютъ, приведя къ одному знам., такъ что;

$$1=A(x-a)+B(x+a) \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

и пользуясь тѣмъ, что оно справедливо при *всякомъ* x, даютъ x такія значенія, чтобы множители въ скобкахъ обращались въ нули, и тогда находятъ A и B; т. е.

при $x=a$, находимъ: $B=\frac{1}{2a}$ . . . . . (3)

при $x=-a$, находимъ: $A=-\frac{1}{2a}$ . . . (4).

Послѣ подстановки найденныхъ значеній числителей въ (1), искомое разложеніе выполнено (въ чемъ слѣдуетъ убѣдиться непосредственнымъ сложеніемъ); итакъ въ данномъ примѣрѣ:

$$\frac{1}{x^2-a^2}=-\frac{\frac{1}{2a}}{x+a}+\frac{\frac{1}{2a}}{x-a};$$ поэтому:

$$J=\frac{1}{2a}\left(\int\frac{dx}{x-a}-\int\frac{dx}{x+a}\right)=\text{(по формулѣ (27))}=$$

$$=\frac{1}{2a}\left[lg(x-a)-lg(x+a)\right]=\frac{1}{2a}lg\frac{x-a}{x+a}+c.$$

492. Аналогично: $J=\frac{1}{2a}lg\frac{a+x}{a-x}+c.$

493. Раскрывъ скобки, рѣшаемъ подобно № 484 и находимъ: $J=e^x(x^3-3x^2+6x-7)+c.$

494. $J=\int tgx\,.\left(\frac{1}{cs^2x}-1\right)dx=\int tgx\,.\,dtgx-\int tgx dx=$

$=$ (см. № 249) $=\frac{1}{2}\,tg^2x+lgcsx+c.$

495. По правилу (*c*) § 11, $J=\int\frac{(z^2+1)^3\,.\,2zdz}{z}=$

$$=2\frac{z^7}{7}+6\frac{z^5}{5}+6\frac{z^3}{3}+2z+c=2\sqrt{x-1}\left[\frac{1}{7}(x-1)^3+\frac{3}{5}(x-1)^2+x\right]+c.$$

496. По тому же правилу: $J=lg(e^x+e^{-x})+c.$

497. Полагая $2x=z$, находимъ: $J=\frac{1}{2}\,arcsn2x+c.$

498. Пусть $x=2z$; тогда $J=arcsn\frac{x}{2}+c.$

499. Пусть $x=az$; тогда $J=arcsn\frac{x}{a}+c.$

Другой способъ: $x=a\,.\,sn\varphi$; $dx=a\,.\,cs\varphi d\varphi$; тогда

$$J=\int\frac{acs\varphi d\varphi}{a\sqrt{1-sn^2\varphi}}=\int d\varphi=\varphi+c=arcsn\frac{x}{a}+c.$$

500. $J=\int\frac{1}{1+e^x}dx=\int\frac{(1+e)^x-e^x}{1+e^x}dx=\int dx-\int\frac{e^xdx}{1+e^x}=$

$=$ (см. правило (*c*) § 11) $=x-lg(1+e^x)+c=lg\frac{e^x}{1+e^x}+c.$

501. Одинъ изъ искусственныхъ пріемовъ заключается въ томъ, что уничтожаютъ ирраціональность въ *числителѣ*, переводя ее въ знаменатель. Здѣсь съ этой цѣлью достаточно умножить и раздѣлить на $\sqrt{1-x^2}$; тогда:

$$J=\int\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\int x\,.\,\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=arcsnx-J_1.\quad.\ (1).$$

Интегралъ J_1 вычисляемъ по формулѣ (38), принимая $\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = dv$; тогда (см. № 486а): $v = -\sqrt{1-x^2}$ и

$$J_1 = -x\sqrt{1-x^2} - \int(-\sqrt{1-x^2})dx = -x\sqrt{1-x^2} +$$

$+\int\sqrt{1-x^2}\,dx$ . . . . . (2). Но послѣдній интегралъ въ равенствѣ (2) есть не что иное, какъ первоначальный J; подставивъ это въ (1), находимъ: $J = arcsnx + x\sqrt{1-x^2} - J$;

откуда $J = \frac{1}{2}\,arcsnx + \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + c.$

502. Пусть: $\frac{dx}{(1+x)^2} = dv$; $x \cdot e^x = u$; тогда

$$v = \int(1+x)^{-2}d(1+x) = \frac{(1+x)^{-1}}{-1} = -\frac{1}{1+x};\ du = e^x dx + xe^x dx =$$

$$= (1+x)e^x dx;\ \text{поэтому}\ J = -\frac{xe^x}{1+x} - \int\frac{-1}{1+x}(1+x)e^x dx =$$

$$= -\frac{xe^x}{1+x} + e^x = \frac{e^x}{1+x} + c.$$

503. $J = $(см. въ рѣш. № 501 J_1) $= -x\sqrt{1-x^2} + arcsnx - J$; откуда $J = \frac{1}{2}\,arcsnx - \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + c.$

504. Кромѣ рѣшенія, аналогичнаго № 501, можно примѣнить и т. наз. „подстановку Лежандра", именно $x = asn\varphi$ (сравн. № 499); тогда $dx = acs\varphi d\varphi$;

$$J = a^2\int\frac{sn^2\varphi cs\varphi d\varphi}{cs\varphi} = a^2\int sn^2\varphi d\varphi = (\text{см. рѣш. № 461}) =$$

$$= a^2 \cdot \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2}\,a^2 sn\varphi cs\varphi + C = \frac{a^2}{2} \cdot arcsn\frac{x}{a} - x\sqrt{a^2-x^2} + c.$$

505. Кромѣ рѣшенія подобно № 501, можно еще аналогично № 504 найти сразу (см. № 462):

$$J = \frac{a^2}{2}arcsn\frac{x}{a} + \frac{1}{2}\,x\sqrt{a^2-x^2} + c.$$

506. По образцу зад. № 491, сначала разлагаемъ:

$$\frac{1}{x^2-8x+15} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x-3} \text{ . . . . . (1), т. е.}$$

$1 = A(x-3) + B(x-5)$ . . . . . (2); полагая $x = 5$ и $x = 3$,

находимъ: $A=\frac{1}{2}$ и $B=-\frac{1}{2}$; и на основаніи (1),

$$J=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-5}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-3}=\frac{1}{2}\,lg(x-5)-\frac{1}{2}\,lg(x-3)=$$

$$=\underline{lg\sqrt{\frac{x-5}{x-3}}+c.}$$

506а. Такъ какъ корни знам. мнимые, то онъ не разлагается на линейныхъ множителей (если бы поступить аналогично № 491, то числители A и B оказались бы мнимыми); поэтому постараемся свести къ формулѣ (34), для чего выдѣляемъ въ знаменателѣ въ видѣ слагаемаго квадратъ линейнаго двучлена; тогда $J=\int\frac{dx}{(x+4)^2+4}$; чтобы довершить сходство, дѣлимъ числителя и знам. на 4; получится:

$$J=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{1+\left(\frac{x+4}{2}\right)^2}\ldots\ldots(1).$$ Теперь полагаемъ:

$$\frac{x+4}{2}=z;\ dx=2dz \text{ и } J=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{1+z^2}=\frac{1}{2}\,arctgz+c=$$

$$=\underline{\frac{1}{2}\,arctg\frac{x+4}{2}+c.}$$

507. По образцу № 491 и 506, разлагаемъ:

$\frac{1}{x^2+6x+8}=\frac{A}{x+4}+\frac{B}{x+2}$; $1=A(x+2)+B(x+4)$; при $x=-2$ и $x=-4$, находимъ: $B=\frac{1}{2}$; $A=-\frac{1}{2}$, такъ что $J=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+2}-$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+4}=\underline{lg\sqrt{\frac{x+2}{x+4}}+c.}$$

507а. Въ виду мнимыхъ корней знаменателя, поступаемъ подобно № 506а, такъ что:

$$J=\int\frac{dx}{(x-3)^2+4^2}=\frac{1}{4}\int\frac{\frac{dx}{4}}{\left(\frac{x-3}{4}\right)^2+1}=\underline{\frac{1}{4}\,arctg\frac{x-3}{4}+c.}$$

508. Замѣняемъ: $1+sn x=1+cs\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2cs^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$;

$$J=\int\frac{\frac{dx}{2}}{cs^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}=-\int\frac{d\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{cs^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}=\underline{-tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+c.}$$

509. Разлагая на простѣйшія дроби подобно № 491 и 492, находимъ $J=\underline{lg\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+c.}$

509а. Полагаемъ $x=\frac{1}{z}$; тогда $dx=-\frac{dz}{z^2}$; $J=\int\frac{-dz}{\sqrt{1-z^2}}=$

$$=arccosz+c=\underline{arccos\frac{1}{x}+c=arcsecx+c.}$$

510. Если въ раціон. дроби показатель высшаго члена при x въ числителѣ больше или равенъ показателю при высшемъ членѣ въ знам., то прежде всего надо раздѣлить числителя на знаменателя и выдѣлить цѣлую часть; поэтому здѣсь:

$$J=\int\left(2x^2-x-3+\frac{5}{2x+1}\right)dx=\underline{\frac{2}{3}x^3-\frac{x^2}{2}-3x+\frac{5}{2}lg(2x+1)+C.}$$

511. Подобно № 506а,

$$J=\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}dx}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\right]^2+1}=$$

$$=\underline{\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.}$$

512. Подобно № 501, уничтожаемъ ирраціональность въ числителѣ, умноживъ оба члена дроби на $\sqrt{1-x}$; тогда

$$J=\int\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}-\int(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}xdx=$$

$$=arcsnx+\frac{1}{2}\int(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-x^2)=\underline{arcsnx+\sqrt{1-x^2}+C.}$$

513. Раздѣливъ числителя на знаменателя, находимъ:

$$J=\int\left(1-\frac{2}{e^x+2}\right)dx=(\text{см. № 500})=x-2x+2lg(e^x+1)+C=$$

$$=lg\frac{(1+e^x)^2}{e^x}+C.$$

514. Подстановкой: $x^2=a^2z$, придаемъ видъ:

$$J=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\frac{1}{2}\,arsn\,\frac{x^2}{a^2}+C.$$

514a. Подстановкой $x=tg\varphi$ легко свести къ № 469, но здѣсь болѣе удобна такъ наз. 1-ая *Эйлерова подстановка*: $\sqrt{1+x^2}=z-x$; тогда $1+x^2=z^2-2zx+x^2$; т. е. $1=z^2-2zx$. (1). Дифференцируемъ обѣ части равенства (1):

$0=2zdz-2zdx-2xdz$, откуда: $dx=\frac{(z-x)dz}{z}$; тогда

$$J=\int\frac{(z-x)dz}{z(z-x)}=lgz+C=lg(x+\sqrt{1+x^2})+C.$$

514b. Аналогично предыд. $J=lg(x+\sqrt{a^2+x^2})+C.$

515. $J=\left|_1^e\right. lgx=lge-lg1=1-0=1.$

516. $J=\left|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right.\frac{1}{2}lg(5+2sn5x)=\frac{1}{2}lg(5+2.1)-\frac{1}{2}lg(5-2.1)=$

$$=lg\sqrt{\frac{7}{3}}.$$

517. $J=\left|_0^{\frac{\pi}{2}}\right.-\frac{1}{3}lg(4+3cs3x)=-\frac{1}{3}lg(4+0)+\frac{1}{3}lg(4+3.1)=$

$$=lg\sqrt[3]{\frac{7}{4}}.$$

518. $J=\left|_1^2\right.\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{3x}-\frac{15}{4}\sqrt[3]{(x+3)^4}+\frac{15}{2}\sqrt[5]{x^2}\right]=$

$$=\left(\frac{16}{3}-\frac{1}{6}-\frac{15}{4}.5\sqrt[3]{5}-\frac{15}{2}\sqrt[5]{4}\right)-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}-\frac{15}{4}.4\sqrt[3]{4}+\frac{15}{2}\right)=$$

$$=-\frac{8}{3}+15\left(\sqrt[3]{4}-\frac{5}{4}\sqrt[3]{5}-\frac{1}{2}\sqrt[5]{4}\right).$$

519. $J=\left|_{\sqrt{3}}^{1}\right. lgarctgx=lgarctg1-lgarctg\sqrt{3}=$

$$=lg\frac{\pi}{4}-lg\frac{\pi}{3}=lg\frac{3}{4}.$$

520. $J=\left|_{\frac{1}{2}}^{1}\right. lgarcsnx=lgarcsn1-lgarcsn\frac{1}{2}=$

$$=lg\frac{\pi}{2}-lg\frac{\pi}{6}=lg3.$$

521. (См. № 484). $J=\left|_{0}^{1}\right. e^x(x-1)=e\cdot 0-e^0\cdot(-1)=1.$

522. $J=\left|_{1}^{e}\right. \frac{lg^3x}{3}=\frac{1}{3}lg^3e-\frac{1}{3}lg^31=\frac{1}{3}\cdot 1-\frac{1}{3}\cdot 0=\frac{1}{3}.$

523. $J=\frac{\pi}{4}.$ **524.** $J=\frac{a^m-1}{mlga}.$

525. См. рѣш. № 461; $J=\frac{\pi}{4}.$

526. См. рѣш. № 438; $J=\frac{\pi}{4a}.$

527. $J=\left|_{2}^{7}\right. \frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3}=18-\frac{16}{3}=\frac{28}{3}.$

528. $J=\left|_{0}^{1}\right. (-\sqrt{1-x^2})=0-(-1)=1.$ (См. № 486а).

529. См. рѣш. № 499; $J=\frac{\pi}{2}.$

530. См. рѣш. № 429;

$$J=-lgcs\frac{\pi}{4}+lgcs0=lg\frac{cs0}{cs\frac{\pi}{4}}=lg\sqrt{2}=\frac{1}{2}lg2.$$

531. См. рѣш. № 471; $J=1.$ **532.** $J=e-1.$

533. См. рѣш. № 467; $J=lg\sqrt{3}=\frac{1}{2}lg3.$

534. Подобно № 474, находимъ

$$\int x^2csxdx=x^2snx+2xcsx-2snx;\ J=\frac{\pi^2}{4}-2.$$

535. См. № 442; $J=\frac{e-1}{e}.$

536. См. № 478; $J=\frac{5\pi}{12}-\sqrt{1-\frac{\pi^2}{36}}$.

537. См. № 476; $J=\frac{3}{16}e^4+\frac{1}{16}$.

538. См. № 505; $J=\frac{\pi a^2}{4}$.

539. См. № 509; $J=lg\sqrt{1,8}$.

540. См. № 502; $J=\frac{e-2}{2}$.

541. Сперва ищемъ неопред. $\int$ по частямъ:

$$arctg\sqrt{x}=u;\ dx=dv;\ du=\frac{dx}{(1+x)2\sqrt{x}};\ v=x+C=$$

$=$(полагаемъ $C=1$)$=x+1$; $\int arctg\sqrt{x}\,dx=(x+1)arctg\sqrt{x}-\sqrt{x}$;

$$J=4\cdot\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}+2\cdot\frac{\pi}{4}+1=\frac{11}{6}\pi+1-\sqrt{3}.$$

542. Аналогично № 482, находимъ:

$$\left|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(snx-\frac{2}{3}sn^3x+\frac{1}{5}sn^5x\right)=\frac{53}{480}\right.$$

543. См. № 514а; $J=lg(1+\sqrt{2})$.

544. См. № 509а; $J=\frac{\pi}{4}$.

545. Вводя тригоном. единицу (см. № 465), находимъ:

$$J=\left|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{3}tg^3x+tgx\right)\right.=2\sqrt{3}-\frac{4}{3}.$$

546. Рѣшаемъ подобно № 502; $J=\left|_{-1}^{0}\frac{e^{-x}}{1-x}\right.=1-\frac{e}{2}$.

547. Подобно № 518, находимъ $a=12$; затѣмъ производная

$$f'(x)=\frac{372}{x^2+x+1};\ \text{при } x=5\ f'(5)=10.$$

Далѣе, подобно № 377, minim. $F(x)$ имѣетъ мѣсто при $x=5$ и $F(5)=10$. Итакъ, требуется къ эллипсу: $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{100}=1$ про-

вести касат. и нормаль въ точкѣ $(10, y_0>0)$. Рѣшая подобно № 191, находимъ ур-іе касательной: $25x+6y\sqrt{11}=360$, а для нормали: $18x\sqrt{11}-75y=55\sqrt{11}$.

548. Аналогично № 427 и 438, $a=8$; подобно № 390, $b=$max. $f(2)=6$; $F'(x)=\frac{6x+7}{x^2-4}$. Ур-іе касательной въ точкѣ $(3;0{,}75\sqrt{39})$: $9x+4y\sqrt{39}=192$; а нормали: $16x\sqrt{39}-9y=45\sqrt{39}$.

549. Суммируемъ по формулѣ прогрессіи:

$f(x)=\frac{2x}{2-x}$; $f'(x)=\frac{4}{(2-x)^2}$; $\frac{f(x)}{f'(x)}=\frac{(2-x)x}{2}$; при $x=4$; $\frac{f(4)}{f'(4)}=-4$.

$$a=-\frac{1}{27}\Big|_1^4 2\sqrt{x}(4-x^2)=2;\ \text{maxim. } F(x)=F\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2};$$

$$\text{minim. } F(x)=F\left(\frac{5}{8}\pi\right)=-\sqrt{2};\ b=2\sqrt{2}.$$

Ур-іе касательной:

$4x-y\sqrt{6}=4$; нормали: $x\sqrt{6}+4y+12\sqrt{6}=0$.

550. $f'(x)=-sn4x$; ея min. $=-1$;

$$c=\frac{15}{\pi}\left(arcsn1-arcsn\frac{1}{2}\right)=5;\ b=F\left(\frac{2}{3}\right)=3;\ a=\sqrt{c^2-b^2}=4.$$

Точка касанія: $\left(\frac{4}{3}\sqrt{10},\ -1\right)$.

Ур-іе касательной: $3x\sqrt{10}+4y=36$; нормали: $4x-3y\sqrt{10}=\frac{25}{3}\sqrt{10}$. Длина подкасат. $=\frac{x_0^2-a^2}{x_0}=\frac{2\sqrt{10}}{15}$.

551 $p=\left|_0^{\frac{\pi}{2}}(3snx-sn^3x)=2;\ \text{max. } f(x)=f(+1)=1=y_1;\right.$

$y_2=\frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2}$; ур-ія касательныхъ: $y=2x+\frac{1}{2}$ и $y=-\frac{4}{3}x-\frac{3}{4}$. Общая точка: $\left(-\frac{3}{8},\ -\frac{1}{4}\right)$.

552. Искомая ордината: $y_0=\frac{11}{27}+\frac{7}{27}=\frac{2}{3}$; $p=3$; ур-іе нормали: $2x+9y=\frac{166}{27}$; поднормаль равна 1,5.

553. Полагая $\sqrt{x}=z$, находимъ $a=lg4$; тогда $r=f\left(\frac{3}{4}\right)=3$. Такъ какъ вершина параболы лежитъ въ центрѣ окружности, то абсцисса ея фокуса $=r$, слѣд., $\frac{p}{2}=3$. Находимъ точки пересѣченія кривыхъ: $x^2+y^2=9$ и $y^2=12x$. Искомая касательная къ окружности имѣетъ ур-іе:
$(\sqrt{5}-2)x+2y\sqrt{\sqrt{5}-2}=3$, а къ параболѣ:

$$2y\sqrt{\sqrt{5}-2}=x-6+3\sqrt{5}.$$

554. $e=f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{3}$; для нахожденія b примѣняемъ подстановку (§ 11c): $\sqrt{1-x^2}=z$; $b=\sqrt{2}\,.\Big|_0^1\{-(x^2+2)\sqrt{1-x^2}\}=-2\sqrt{2}$; имѣемъ: $e=\frac{1}{3}=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{a^2-8}}{a}$, т. е. $\sqrt{a^2-8}=\frac{1}{3}a$, откуда $a=3$. Далѣе, $F'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$; абсцисса равна -1. Искомая нормаль: $9x-3y+1=0$.

555. Для упрощенія вычисленія A, суммируемъ (по формулѣ прогрессіи) каждый изъ членовъ дроби, такъ что $f(x)=\frac{x^6-1}{x^7-1}$; тогда $f'(x)=\frac{7x^6-6x^5-x^{12}}{(x^7-1)^2}$ и $f'(-1)=3=A$. Далѣе $B=F\left(\frac{1}{4}\right)=-2$, и $C=3\,.\,(-2)\,.\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1-e^x}\right.=6$. Слѣдов., ур-ія сторонъ суть: M_1M_2 . . . . . $3x-2y+6=0$ . . . . . (1); и M_2M_3 . . . $2x-y-3=0$ . . . (2). Высота, опущенная на 3-ью сторону M_1M_3, проходитъ черезъ вершину M_2 и чрезъ начало; подобно рѣш. № 72, находимъ ур-іе этой высоты: $7x-4y=0$ . . . (3). Искомая сторона $\perp$ къ ней, но нужно знать хоть одну точку этой стороны, напр., точку M_1. Эта точка лежитъ на пересѣченіи стороны M_1M_2 съ высотой h_1, опущенной на сторону M_2M_3. Но h_1 проходитъ черезъ начало, и подобно № 84, получаемъ ея ур-іе: $x+2y=0$ . . . (4). Слѣд., точка M_1, какъ общая для линій (1) и (4), будетъ: $\left(-\frac{3}{2}\,,\,\frac{3}{4}\right)$. Тогда, подобно № 88, находимъ искомое ур-іе M_1M_3 . . . $16x+28y+3=0$.

[illegible] библiотека
[illegible]
Системат. кат. Отд. [illegible]

ОГЛАВЛЕНIЕ.

Стран.

ЧАСТЬ I. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРIЯ. Введенiе 1
ГЛАВА I. Координаты и уравненiя. Точка и линiя вообще. § 1. Формулы . 3
§ 2. Задачи 5
ГЛАВА II. Прямая линiя. § 3. Основныя формулы 8
§ 4. Задачи 10
ГЛАВА III. Окружность. § 5. Основныя формулы 14
§ 6. Задачи 14
ГЛАВА IV. Эллипсъ. § 7. Основныя формулы 16
§ 8. Задачи 17
ГЛАВА V. Гипербола. § 9. Основныя формулы 20
§ 10. Задачи. 21
ГЛАВА VI. Парабола. § 11. Основныя формулы 23
§ 12. Задачи 23
ГЛАВА VII. Касательныя и нормали. § 13. Формулы 24
§ 14. Задачи 25
ГЛАВА VIII. Задачи на всѣ отдѣлы. 28
Рѣшенiя и отвѣты 30

ЧАСТЬ II. ОСНОВАНIЯ АНАЛИЗА БЕЗКОНЕЧНО МАЛЫХЪ. Введенiе 64
ГЛАВА I. Отысканiе предѣловъ функцiй. § 1. Основныя формулы 66
§ 2. Задачи 67
ГЛАВА II. Производныя отъ функцiи. § 3. Основныя понятiя и формулы 68
§ 4. Дифференцированiе несложныхъ функцiй 72
§ 5. Дифференцированiе сложныхъ функцiй 73
§ 6. Дифференцированiе произведенiя и частнаго 74
§ 7. Дифференцированiе болѣе *сложныхъ функцiй* 75
ГЛАВА III. Возрастанiе и убыванiе функцiй. § 8. Правила и формулы . . 77
§ 9. Задачи 78
ГЛАВА IV. Неопредѣленные интегралы. § 10. Основныя формулы 81
§ 11. Прiемы и правила интегрированiя 81
§ 12. Простѣйшiе неопред. интегралы 82
§ 13. Интегрированiе по частямъ 84
ГЛАВА V. Опредѣленные интегралы. § 14. Общiя понятiя и формулы . . 86
§ 15. Задачи 87
ГЛАВА VI. Смѣшанныя задачи на всѣ отдѣлы курса. 89
Рѣшенiя и отвѣты 92